

Analysis

Kurvenuntersuchung ganzrationale Funktionen Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen

**Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Berufliche Gymnasien: ab Klasse 12
Berufskolleg**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Untersuche die folgenden Funktionen auf folgende Eigenschaften:

- Symmetrie zum Ursprung bzw. zur y-Achse
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Extrempunkte
- Wendepunkte
- Zeichnen des Schaubildes von $f(x)$ unter Nutzung der berechneten Ergebnisse

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

b) $f(x) = -x^4 + 2x^3$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $f(x) = 0,25 \cdot (1 + x^2) \cdot (5 - x^2)$

e) $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

Aufgabe 2:

- a) Untersuche das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{48} \cdot (80 - 24x^2 + x^4)$ auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne das Schaubild von f .
- b) Für welche Werte von c hat die Gleichung $f(x) = c$ vier bzw. drei bzw. zwei bzw. keine Lösung?

Lösungen**Aufgabe 1:**

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

Symmetrie:

Das Schaubild ist symmetrisch zur y-Achse.

Begründung: Die Funktionsgleichung besitzt nur gerade Hochzahlen.

*Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:*Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = -3$ also ist $S_y(0 | -3)$ Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \quad \text{Substitution: } x^2 = u$$

$$u^2 - 2u - 3 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow u_1 = 3 \text{ und } u_2 = -1$$

$$\text{Rücksubstitution: } x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$x^2 = -1 \text{ ist nicht lösbar}$$

Es gibt zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(-\sqrt{3} | 0)$ und $S_2(\sqrt{3} | 0)$ *Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:*Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$ (höchster Grad x^4 ist entscheidend)Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$ (höchster Grad x^4 ist entscheidend)*Ableitungen:*

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f'''(x) = 24x$$

*Extrempunkte:*Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x \cdot (x^2 - 1) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow H(0 | f(0)) \rightarrow H(0 | -3) \text{ Hochpunkt}$$

$$f''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow T(-1 | f(-1)) \rightarrow T(-1 | -4) \text{ Tiefpunkt}$$

$$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow T(1 | f(1)) \rightarrow T(1 | -4) \text{ Tiefpunkt}$$

*Wendepunkte:*Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

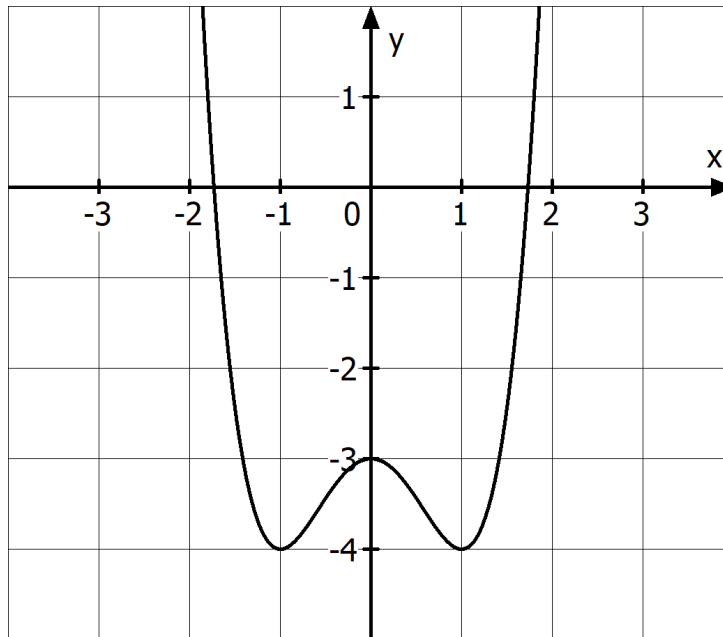
$$12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = -24 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \neq 0 \Rightarrow W(-\sqrt{\frac{1}{3}} | f(-\sqrt{\frac{1}{3}})) \rightarrow W(-\sqrt{\frac{1}{3}} | -\frac{32}{9}) \text{ Wendepunkt}$$

$$f'''(\sqrt{\frac{1}{3}}) = 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \neq 0 \Rightarrow W(\sqrt{\frac{1}{3}} | f(\sqrt{\frac{1}{3}})) \rightarrow W(\sqrt{\frac{1}{3}} | -\frac{32}{9}) \text{ Wendepunkt}$$

Zeichnen des Schaubildes



b) $f(x) = -x^4 + 2x^3$

Symmetrie:

Das Schaubild ist weder symmetrisch zum Ursprung noch zur y-Achse.

Begründung: Die Funktionsgleichung besitzt gerade und ungerade Hochzahlen.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 0$ also ist $S_y(0|0)$

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$

$$-x^4 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x^3 \cdot (-x + 2) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $x = 2$

Es gibt zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(0|0)$ und $S_2(2|0)$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $f(x) \rightarrow -\infty$ (höchster Grad $-x^4$ ist entscheidend)

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow -\infty$ (höchster Grad $-x^4$ ist entscheidend)

Ableitungen:

$$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$$

$$f''(x) = -12x^2 + 12x$$

$$f'''(x) = -24x + 12$$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$-4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (-4x + 6) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } -4x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1,5$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(1,5) = -9 < 0 \Rightarrow H(1,5 | f(1,5)) \rightarrow H(1,5 | 1,6875) \quad \text{Hochpunkt}$$

$$f''(0) = 0 \quad \text{keine Aussage über Extrempunkt möglich}$$

$$\text{Kontrolle mit Vorzeichenwechsel: } f'(-1) = 10 > 0 \quad \text{und} \quad f'(1) = 2 > 0$$

Die Ableitung besitzt keinen Vorzeichenwechsel.

Somit existiert an der Stelle $x = 0$ kein Extrempunkt (sondern ein Sattelpunkt).

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$-12x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x \cdot (-12x + 12) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

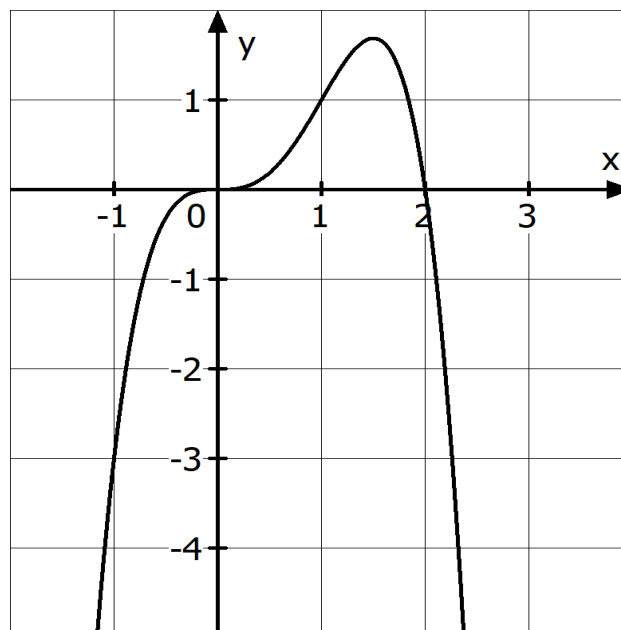
$$\text{Gleichung I): } x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } -12x + 12 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(0) = 12 \neq 0 \Rightarrow W(0 | f(0)) \rightarrow W(0 | 0) \quad \text{Wendepunkt}$$

$$f'''(1) = -12 \neq 0 \Rightarrow W(1 | f(1)) \rightarrow W(1 | 1) \quad \text{Wendepunkt}$$

Zeichnen des Schaubildes

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

Symmetrie:

Das Schaubild ist weder symmetrisch zum Ursprung noch zur y-Achse.

Begründung: Die Funktionsgleichung besitzt gerade und ungerade Hochzahlen.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 0$ also ist $S_y(0|0)$

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$

$x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$

Es gibt zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(0|0)$ und $S_2(1|0)$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $f(x) \rightarrow -\infty$ (höchster Grad x^3 ist entscheidend)

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$ (höchster Grad x^3 ist entscheidend)

Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = \frac{1}{3}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow T(1|f(1)) \rightarrow T(1|0) \text{ Tiefpunkt}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0 \Rightarrow H\left(\frac{1}{3}|f\left(\frac{1}{3}\right)\right) \rightarrow H\left(\frac{1}{3}|\frac{4}{27}\right) \text{ Hochpunkt}$$

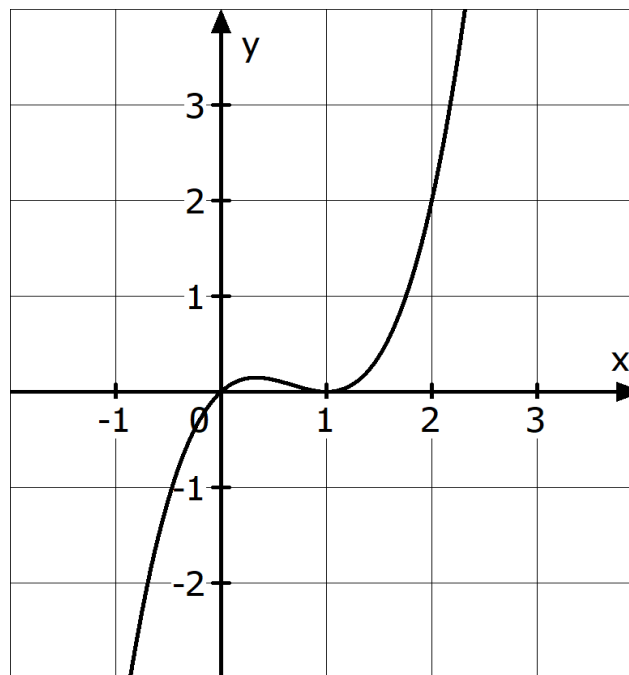
Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0 \Rightarrow W\left(\frac{2}{3}|f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \rightarrow W\left(\frac{2}{3}|\frac{2}{27}\right) \text{ Wendepunkt}$$

Zeichnen des Schaubildes

d) $f(x) = 0,25 \cdot (1 + x^2) \cdot (5 - x^2)$

Auflösen der Klammern: $f(x) = 0,25 \cdot (5 - x^2 + 5x^2 - x^4) = -0,25x^4 + x^2 + 1,25$

Symmetrie:

Das Schaubild ist symmetrisch zur y-Achse.

Begründung: Die Funktionsgleichung besitzt nur gerade Hochzahlen.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 1,25$ also ist $S_y(0 | 1,25)$

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$

$0,25 \cdot (1 + x^2) \cdot (5 - x^2) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $5 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

Es gibt zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(-\sqrt{5} | 0)$ und $S_2(\sqrt{5} | 0)$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $f(x) \rightarrow -\infty$ (höchster Grad $-0,25x^4$ ist entscheidend)

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow -\infty$ (höchster Grad $-0,25x^4$ ist entscheidend)

Ableitungen:

$f'(x) = -x^3 + 2x$

$f''(x) = -3x^2 + 2$

$f'''(x) = -6x$

Extrempunkte:Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$-x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (-x^2 + 2) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow T(0 \mid f(0)) \rightarrow T(0 \mid 1,25) \quad \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(-\sqrt{2}) = -4 < 0 \Rightarrow H(-\sqrt{2} \mid f(-\sqrt{2})) \rightarrow H(-\sqrt{2} \mid 2,25) \quad \text{Hochpunkt}$$

$$f''(\sqrt{2}) = -4 < 0 \Rightarrow H(\sqrt{2} \mid f(\sqrt{2})) \rightarrow H(\sqrt{2} \mid 2,25) \quad \text{Hochpunkt}$$

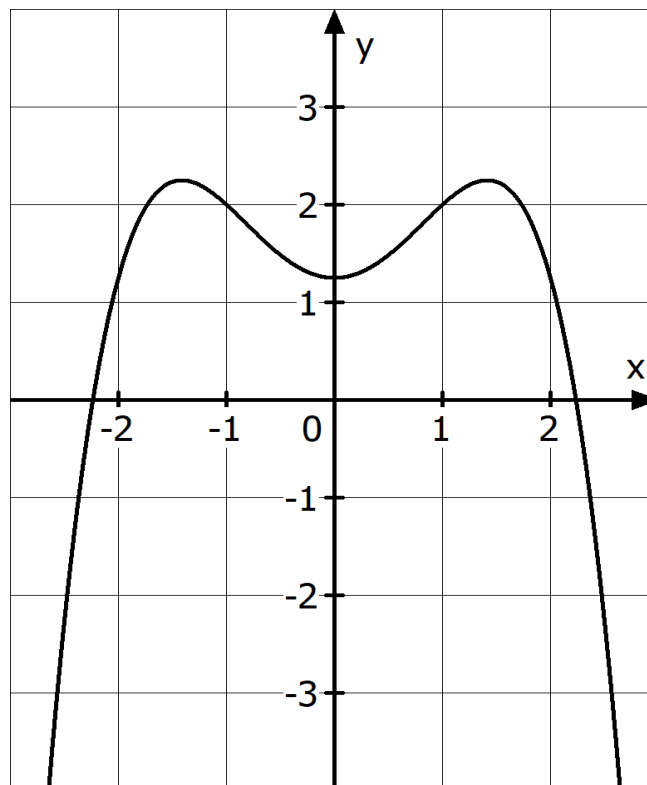
Wendepunkte:Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$-3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow W(-\sqrt{\frac{2}{3}} \mid f(-\sqrt{\frac{2}{3}})) \rightarrow W(-\sqrt{\frac{2}{3}} \mid \frac{65}{36}) \quad \text{Wendepunkt}$$

$$f'''(\sqrt{\frac{2}{3}}) = -6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow W(\sqrt{\frac{2}{3}} \mid f(\sqrt{\frac{2}{3}})) \rightarrow W(\sqrt{\frac{2}{3}} \mid \frac{65}{36}) \quad \text{Wendepunkt}$$

Zeichnen des Schaubildes

e) $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

Symmetrie:

Das Schaubild ist weder symmetrisch zum Ursprung noch zur y-Achse.

Begründung: Die Funktionsgleichung besitzt gerade und ungerade Hochzahlen.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 0$ also ist $S_y(0|0)$

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$

$2x^4 + 7x^3 + 5x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (2x^2 + 7x + 5) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $2x^2 + 7x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{-7 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2,5$

Es gibt drei Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(0|0)$ und $S_2(-1|0)$ und $S_3(-2,5|0)$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$ (höchster Grad $2x^4$ ist entscheidend)

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$ (höchster Grad $2x^4$ ist entscheidend)

Ableitungen:

$$f'(x) = 8x^3 + 21x^2 + 10x$$

$$f''(x) = 24x^2 + 42x + 10$$

$$f'''(x) = 48x + 42$$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$8x^3 + 21x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x \cdot (8x^2 + 21x + 10) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $8x^2 + 21x + 10 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 4 \cdot 8 \cdot 10}}{16} = \frac{-21 \pm 11}{16}$
 $\Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = -\frac{5}{8}$

Hinreichende Bedingung:

$f''(0) = 10 > 0 \Rightarrow T(0|f(0)) \rightarrow T(0|0)$ Tiefpunkt

$f''(-2) = 22 > 0 \Rightarrow T(-2|f(-2)) \rightarrow T(-2|-4)$ Tiefpunkt

$f''(-\frac{5}{8}) = -\frac{55}{8} < 0 \Rightarrow H(-\frac{5}{8}|f(-\frac{5}{8})) \rightarrow H(-\frac{5}{8}|0,549)$ Hochpunkt

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

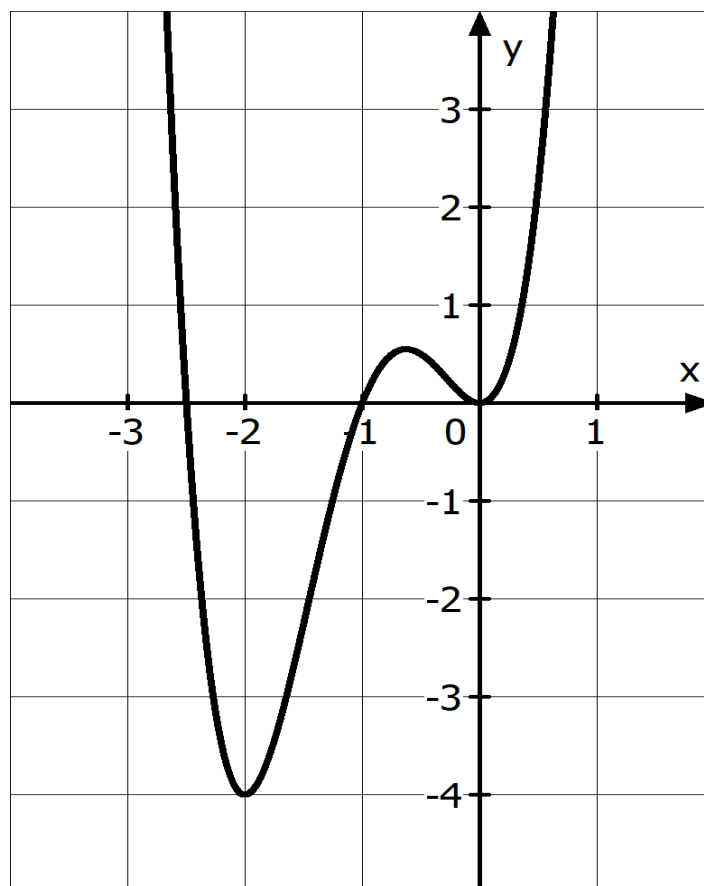
$$24x^2 + 42x + 10 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-42 \pm \sqrt{1764 - 4 \cdot 24 \cdot 10}}{48} = \frac{-42 \pm 28,35}{48}$$
$$\Rightarrow x_1 = -0,28 \text{ und } x_2 = -1,47$$

Hinreichende Bedingung:

$f'''(-0,28) \neq 0 \Rightarrow W(-0,28 | f(-0,28)) \rightarrow W(-0,28 | 0,25)$ Wendepunkt

$f'''(-1,47) \neq 0 \Rightarrow W(-1,47 | f(-1,47)) \rightarrow W(-1,47 | -2,09)$ Wendepunkt

Zeichnen des Schaubildes



f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

Symmetrie:

Das Schaubild ist symmetrisch zum Ursprung.

Begründung: Die Funktionsgleichung besitzt nur ungerade Hochzahlen.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 0$ also ist $S_y(0|0)$

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{3}x^3 - x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Es gibt drei Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(0|0)$ und $S_2(-\sqrt{3}|0)$ und $S_3(\sqrt{3}|0)$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $f(x) \rightarrow -\infty$ (höchster Grad $\frac{1}{3}x^3$ ist entscheidend)

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$ (höchster Grad $\frac{1}{3}x^3$ ist entscheidend)

Ableitungen:

$$f'(x) = x^2 - 1$$

$$f''(x) = 2x$$

$$f'''(x) = 2$$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow H(-1|f(-1)) \rightarrow H(-1|\frac{2}{3}) \quad \text{Hochpunkt}$$

$$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow T(1|f(1)) \rightarrow T(1|-\frac{2}{3}) \quad \text{Tiefpunkt}$$

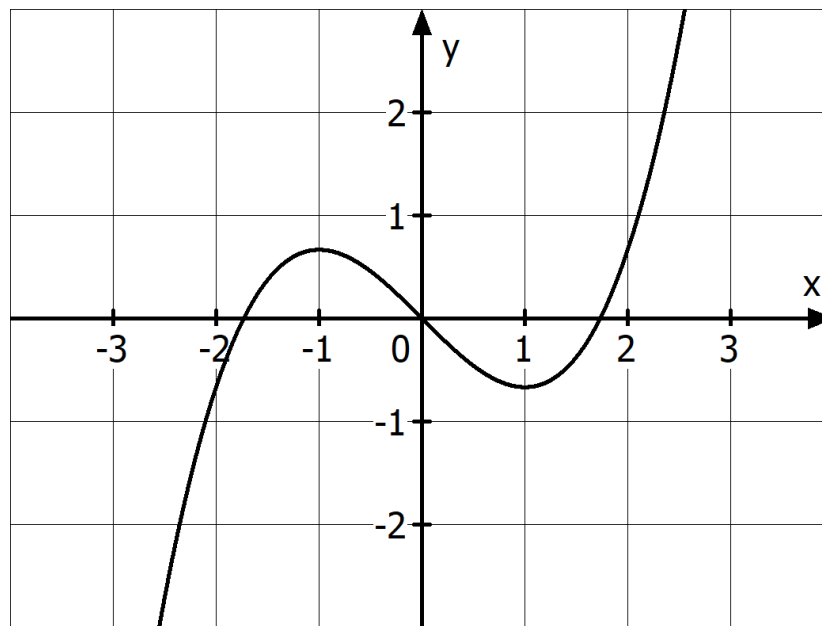
Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow W(0|f(0)) \rightarrow W(0|0) \quad \text{Wendepunkt}$$

Zeichnen des Schaubildes**Aufgabe 2:**

a) $f(x) = \frac{1}{48} \cdot (80 - 24x^2 + x^4)$

Symmetrie:

Das Schaubild ist symmetrisch zur y-Achse.

Begründung: Die Funktionsgleichung besitzt nur gerade Hochzahlen.

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{1}{48}(80 - 24x^2 + x^4) = 0 \Rightarrow x^4 - 24x^2 + 80 = 0 \quad \text{Substitution } x^2 = u$$

$$u^2 - 24u + 80 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 80}}{2} = \frac{24 \pm 16}{2} \Rightarrow u_1 = 20 \text{ und } u_2 = 4$$

$$\text{Rücksubstitution: } x^2 = 20 \Rightarrow x = \pm\sqrt{20}$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Es gibt vier Schnittpunkte: $S_1(-\sqrt{20} | 0)$; $S_2(\sqrt{20} | 0)$; $S_3(-2 | 0)$; $S_4(2 | 0)$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{48}(-48x + 4x^3) = -x + \frac{1}{12}x^3$$

$$f''(x) = -1 + \frac{1}{4}x^2$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}x$$

Extrempunkte:Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$-x + \frac{1}{12}x^3 = 0 \Rightarrow x \cdot \left(-1 + \frac{1}{12}x^2\right) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } -1 + \frac{1}{12}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow H(0 | f(0)) \rightarrow H\left(0 \mid \frac{5}{3}\right) \quad \text{Hochpunkt}$$

$$f''(-\sqrt{12}) = 2 > 0 \Rightarrow T(-\sqrt{12} | f(-\sqrt{12})) \rightarrow T\left(-\sqrt{12} \mid -\frac{4}{3}\right) \quad \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(\sqrt{12}) = 2 > 0 \Rightarrow T(\sqrt{12} | f(\sqrt{12})) \rightarrow T\left(\sqrt{12} \mid -\frac{4}{3}\right) \quad \text{Tiefpunkt}$$

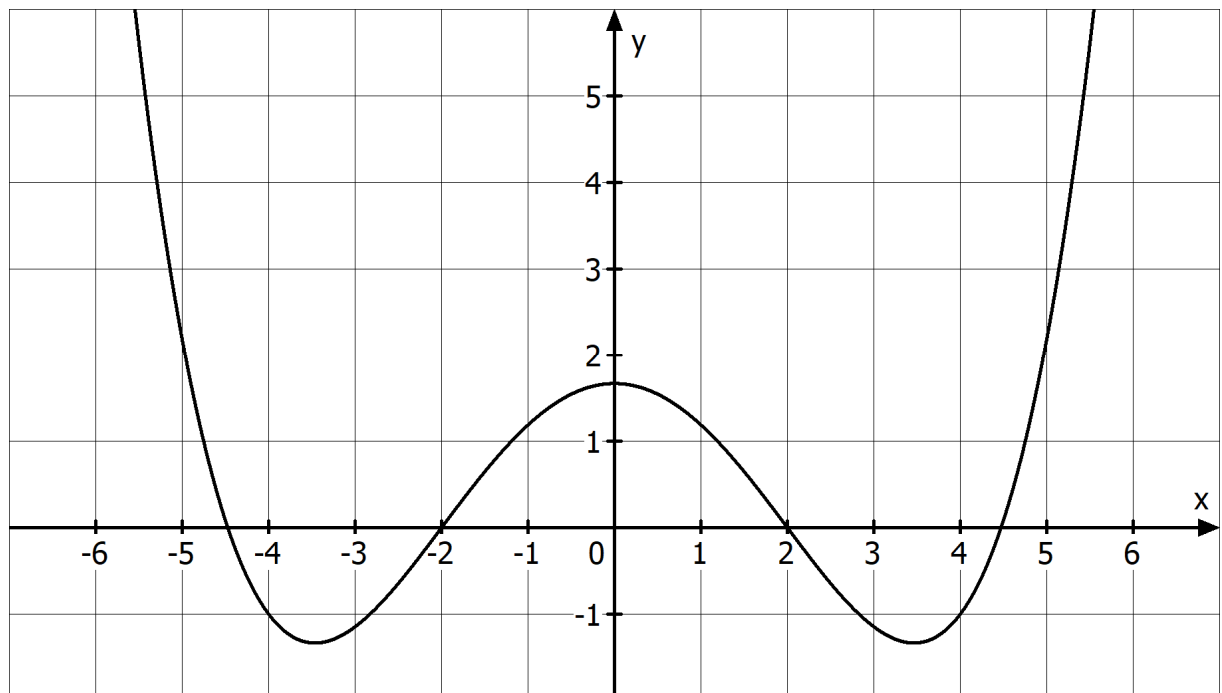
Wendepunkte:Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$-1 + \frac{1}{4}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(-2) = -1 \neq 0 \Rightarrow W(-2 | f(-2)) \rightarrow W(-2 | 0) \quad \text{Wendepunkt}$$

$$f'''(2) = 1 \neq 0 \Rightarrow W(2 | f(2)) \rightarrow W(2 | 0) \quad \text{Wendepunkt}$$

Zeichnung:

b) Für welche Werte von c hat die Gleichung $f(x) = c$ vier bzw. drei bzw. zwei bzw. keine Lösung?

b) Aus der Zeichnung kann die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = c$ abgelesen werden.

Die Tiefpunkte haben den y-Wert $y = -\frac{4}{3}$.

Der Hochpunkt hat den y-Wert $y = \frac{5}{3}$.

Das heißt:

Für $c < -\frac{4}{3}$ besitzt die Gleichung keine Lösung.

Für $c = -\frac{4}{3}$ besitzt die Gleichung 2 Lösungen.

Für $-\frac{4}{3} < c < \frac{5}{3}$ besitzt die Gleichung 4 Lösungen.

Für $c = \frac{5}{3}$ besitzt die Gleichung 3 Lösungen.

Für $c > \frac{5}{3}$ besitzt die Gleichung 2 Lösungen.