

Analysis

Funktionen mit Parametern (Funktionenscharen)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juli 2018

Aufgabe 1:

Bestimme die Nullstellen der gegebenen Funktionenschar.

- a) $f_t(x) = x^2 e^x - t \cdot x \cdot e^x$
- b) $f_t(x) = x^2 + 4tx + 4t^2$
- c) $f_t(x) = x^3 - t^2 x$

Aufgabe 2:

Bilde die erste Ableitungsfunktion.

- a) $f_t(x) = x^2 + 4tx + 4t^2$
- b) $f_t(x) = 2tx \cdot e^{-x^2}$
- c) $f_t(x) = x^4 - t^2 x^3$
- d) $f_t(x) = t^2 \cdot e^x - t \cdot e^{2x}$
- e) $f_t(x) = (t - e^x)^2$

Aufgabe 3:

Bestimme die Extrempunkte in Abhängigkeit von $t > 0$ und ermittle die Gleichung ihrer Ortskurve.

- a) $f_t(x) = (x - 2t) \cdot e^x$
- b) $f_t(x) = -x^2 - t \cdot x + t$

Aufgabe 4:

Bestimme die Wendepunkte W_t der Funktion $f_t(x) = x^3 - t \cdot x^2 + 2tx$ in Abhängigkeit von $t > 0$ und ermittle die Gleichung ihrer Ortskurve.

Aufgabe 5:

Untersuche die Graphen von $f_t(x) = t^2 e^x - t^2 x$ mit $t > 0$ auf Extrempunkte. Welche besondere Lage haben alle diese Punkte im Koordinatensystem?

Aufgabe 6:

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = tx^3 - 4tx$ mit $t \neq 0$.

- a) Welche Punkte haben die Graphen aller Funktionen f_t gemeinsam?
- b) Für welchen Wert von t verläuft der Graph von f_t durch $A(1/6)$?
- c) Für welchen Wert von t ist der Graph von f_t an der Stelle 2 parallel zur Ursprungsgeraden $y = 4x$?
- d) Bestimme den Parameter t so, dass der Graph von f_t den Graphen von f_4 im Koordinatenursprung orthogonal schneidet.

Aufgabe 7:

Gegeben sind die Funktionenschar $f_t(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + 1$ für $t > 0$ und die Gerade

$$g: y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}.$$

- a) Bestimme die Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t .
- b) Zeige, dass einer der Hochpunkte des Graphen von f_t auf der Geraden g liegt.

Lösungen**Aufgabe 1:**

- a) $f_t(x) = 0 \Rightarrow x^2 e^x - t \cdot x \cdot e^x = 0$
 $\Rightarrow x \cdot e^x \cdot (x - t) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
 Gleichung I) $x = 0$
 Gleichung II) $e^x = 0$ ist nicht lösbar
 Gleichung III) $x - t = 0 \Rightarrow x = t$

Es gibt zwei Nullstellen: $x = 0$ und $x = t$.

- b) $f_t(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4tx + 4t^2 = 0$
 Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{-4t \pm \sqrt{16t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4t}}{2} = \frac{-4t \pm 0}{2}$
 Es gibt eine einzige Nullstelle $x = -2t$.

- c) $f_t(x) = x^3 - t^2 x$
 $\Rightarrow x \cdot (x^2 - t^2) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
 Gleichung I) $x = 0$
 Gleichung II) $x^2 - t^2 = 0 \Rightarrow x = \pm t$
 Es gibt drei Nullstellen $x = 0$ und $x = t$ und $x = -t$.

Aufgabe 2:

- a) $f_t(x) = x^2 + 4tx + 4t^2 \Rightarrow f'_t(x) = 2x + 4t$
 b) $f_t(x) = 2tx \cdot e^{-x^2} \Rightarrow f'_t(x) = 2t \cdot e^{-x^2} + 2tx \cdot e^{-x^2} (-2x) = 2t \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$
 c) $f_t(x) = x^4 - t^2 x^3 \Rightarrow f'_t(x) = 4x^3 - 3t^2 x^2$
 d) $f_t(x) = t^2 \cdot e^x - t \cdot e^{2x} \Rightarrow f'_t(x) = t^2 \cdot e^x - 2t \cdot e^{2x}$
 e) $f_t(x) = (t - e^x)^2 \Rightarrow f'_t(x) = 2(t - e^x) \cdot (-e^x) = -2te^x + 2e^{2x}$

Aufgabe 3:

- a) Ableitungen von $f_t(x) = (x - 2t) \cdot e^x$
 $f'_t(x) = 1 \cdot e^x + (x - 2t) \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x - 2t)$
 $f''_t(x) = e^x \cdot (1 + x - 2t) + e^x \cdot 1 = e^x \cdot (2 + x - 2t)$

Notwendige Bedingung: $f'_t(x) = 0$

$e^x \cdot (1 + x - 2t) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $1 + x - 2t = 0 \Rightarrow x = 2t - 1$

Hinreichende Bedingung: $f_t''(2t-1) = e^{2t-1} \cdot (2 + 2t - 1 - 2t) = e^{2t-1} > 0$

Also Tiefpunkt $T(2t-1 / f(2t-1)) \Rightarrow T(2t-1 / -e^{2t-1})$

Ortskurve der Tiefpunkte: $x = 2t - 1 \Rightarrow t = \frac{x+1}{2}$

Die Ortskurve der Tiefpunkte lautet $y = -e^{2t-1} = -e^{2 \cdot \frac{x+1}{2} - 1} \Rightarrow y = -e^x$

b) Ableitungen von $f_t(x) = -x^2 - t \cdot x + t$

$$f_t'(x) = -2x - t \quad \text{und} \quad f_t''(x) = -2$$

Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

$$-2x - t = 0 \Rightarrow x = -0,5t$$

Hinreichende Bedingung: $f_t''(-0,5t) = -2 < 0$

Also Hochpunkt $H(-0,5t / f(-0,5t)) \Rightarrow H(-0,5t / 0,25t^2 + t)$

Ortskurve der Hochpunkte: $x = -0,5t \Rightarrow t = -2x$

Die Ortskurve der Hochpunkte lautet $y = 0,25 \cdot (-2x)^2 + (-2x) \Rightarrow y = x^2 - 2x$

Aufgabe 4:

Ableitungen von $f_t(x) = x^3 - t \cdot x^2 + 2tx$

$$f_t'(x) = 3x^2 - 2tx + 2t \quad \text{und} \quad f_t''(x) = 6x - 2t \quad \text{und} \quad f_t'''(x) = 6$$

Notwendige Bedingung: $f_t''(x) = 0$

$$6x - 2t = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}t$$

Hinreichende Bedingung: $f_t'''(\frac{1}{3}t) = 6 \neq 0$

Also Wendepunkt $W(\frac{1}{3}t / f(\frac{1}{3}t)) \Rightarrow W(\frac{1}{3}t / \frac{2}{3}t^2 - \frac{2}{27}t^3)$

Ortskurve der Wendepunkte: $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow t = 3x$

Die Ortskurve der Wendepunkte lautet $y = \frac{2}{3} \cdot (3x)^2 - \frac{2}{27} \cdot (3x)^3 = 6x^2 - 2x^3$

Aufgabe 5:

Ableitungen von $f_t(x) = t^2 e^x - t^2 x$

$$f'_t(x) = t^2 e^x - t^2 \quad \text{und} \quad f''_t(x) = t^2 e^x$$

Notwendige Bedingung: $f'_t(x) = 0$

$$t^2 e^x - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 e^x = t^2 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Hinreichende Bedingung: $f''_t(0) = t^2 > 0$

Also Tiefpunkt $T(0 / f_t(0)) \Rightarrow T(0 / t^2)$

Die Tiefpunkte liegen alle auf der y-Achse.

Aufgabe 6:

- a) Wir wählen zwei konkrete Funktionen der Schar ($t=1$ und $t=2$) und bestimmen deren Schnittpunkt:

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$x^3 - 4x = 2x^3 - 8x$$

$$\Rightarrow -x^3 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot (-x^2 + 4) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Es gibt drei Schnittpunkte: $S_1(0 / 0)$, $S_2(-2 / 0)$ und $S_3(2 / 0)$

Kontrolle, ob die Schnittpunkte auch auf allen Scharkurven liegen:

$$f_t(0) = 0$$

$$f_t(-2) = -8t + 8t = 0$$

$$f_t(2) = 8t - 8t = 0$$

Damit liegen die Punkte $S_1(0 / 0)$, $S_2(-2 / 0)$ und $S_3(2 / 0)$ auf allen Scharkurven.

- b) Bedingung: $f_t(1) = 6 \Rightarrow t - 4t = 6 \Rightarrow -3t = 6 \Rightarrow t = -2$

Für $t = -2$ liegt der Punkt A auf dem Graph.

$$\text{c) } f_t(x) = tx^3 - 4tx$$

$$f'_t(x) = 3tx^2 - 4t$$

$$\text{Bedingung: } f'_t(2) = 4 \Rightarrow 12t - 4t = 4 \Rightarrow 8t = 4 \Rightarrow t = 0,5$$

d) Bedingung für orthogonalen Schnitt im Ursprung: $f_4'(0) \cdot f_t'(0) = -1$

$$f_4(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f_4'(x) = 12x^2 - 16$$

$$\text{Außerdem gilt } f_t'(x) = 3tx^2 - 4t$$

$$f_4'(0) \cdot f_t'(0) = -1 \Rightarrow -16 \cdot (-4t) = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{64}$$

Aufgabe 7:

a) Ableitungen von $f_t(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}t^2x^2 + 1$

$$f_t'(x) = -x^3 + t^2x$$

$$f_t''(x) = -3x^2 + t^2$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$

$$-x^3 + t^2x = 0 \Rightarrow x \cdot (-x^2 + t^2) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } -x^2 + t^2 = 0 \Rightarrow x = \pm t$$

$$f_t''(0) = t^2 > 0, \text{ also Tiefpunkt bei } x = 0$$

$$f_t''(-t) = -3t^2 + t^2 = -2t^2 < 0, \text{ also Hochpunkt bei } x = -t$$

$$f_t''(t) = -3t^2 + t^2 = -2t^2 < 0, \text{ also Hochpunkt bei } x = t.$$

b) Koordinaten der beiden Hochpunkte von f_1 :

$$H_1(1/f_1(1)) \rightarrow H_1(1/1,25) \quad \text{und} \quad H_2(-1/f_1(-1)) \rightarrow H_2(-1/1,25)$$

$$\text{Einsetzen von } H_1 \text{ in die Gerade: } 1,25 = -\frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{5}{2} \Rightarrow 1,25 = 1,25 \text{ ist eine wahre Aussage}$$

$$\text{Einsetzen von } H_2 \text{ in die Gerade: } 1,25 = -\frac{5}{4} \cdot (-1) + \frac{5}{2} \Rightarrow 1,25 = 3,75 \text{ ist eine falsche Aussage}$$

Damit ist gezeigt, dass einer der Hochpunkte auf der Gerade liegt.