

Analysis

Extremwertaufgaben mit funktionaler Nebenbedingung

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2018

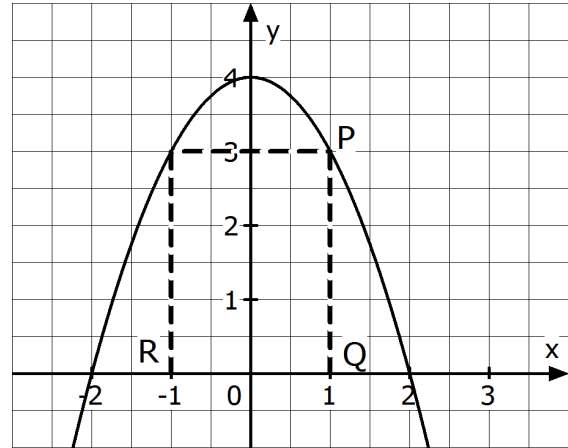
Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = -x^2 + 4$, $-2 \leq x \leq 2$

Die Abbildung zeigt ihr Schaubild. Dem Schaubild wird ein achsenparalleles Rechteck einbeschrieben, wobei der Punkt P einer der Eckpunktes des Rechtecks ist.

Wie müssen die Koordinaten des Punktes P gewählt werden, damit

- der Umfang des Rechtecks maximal wird?
- der Inhalt des Rechtecks maximal wird?
- das Volumen des Drehkörpers, der bei einer Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht, extremal wird?

**Aufgabe 2:**

$P(u/v)$ sei ein beliebiger Punkt auf der Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

mit $-2 \leq x \leq 2$. Gemeinsam mit den Punkten $A(-2/0)$ und $B(u/0)$ bildet er ein Dreieck ABP.

- Skizziere das Schaubild von f .
Bestimme P so, dass das Dreieck ABP den größtmöglichen Flächeninhalt hat.
Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?
- Für welchen Punkt P ist im Dreieck ABP die Summe der Kathetenlängen maximal?

Aufgabe 3:

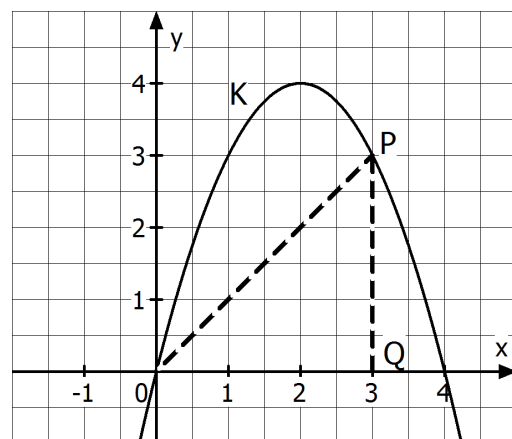
Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -x^2 + 4x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Schaubild ist die Kurve K.

Die Punkte $O(0/0)$, $Q(u/0)$ und der Kurvenpunkt $P(u/f(u))$ mit $0 < u < 4$ bilden ein Dreieck.

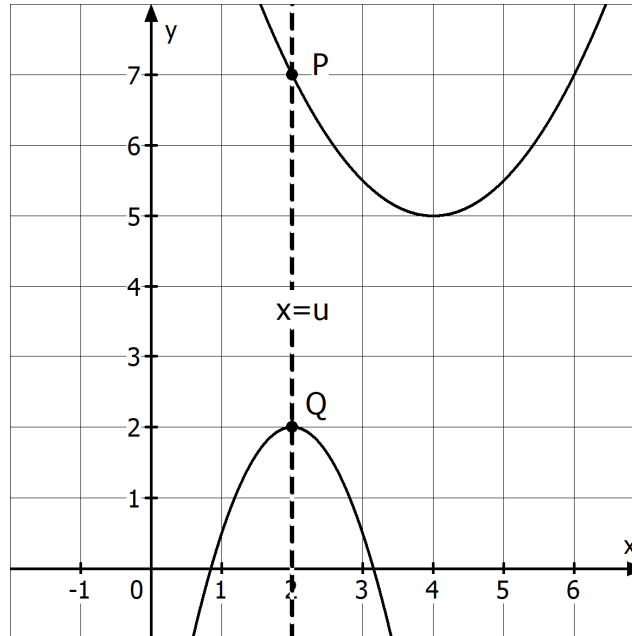
Wie muss u gewählt werden, damit der Inhalt des Dreiecks OPQ maximal wird?
Gib den maximalen Flächeninhalt an.



Aufgabe 4:

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 0,5x^2 - 4x + 13$ und $g(x) = -1,5x^2 + 6x - 4$.

Die Gerade $x = u$ mit $1 \leq u \leq 4$ schneidet den Graphen von f im Punkt P und den Graphen von g im Punkt Q . Für welchen Wert von u ist die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ minimal und wie lang ist die minimale Streckenlänge?



Lösungen

Aufgabe 1:

Die allgemeinen Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks lauten:

$P(u/f(u))$ mit $0 < u < 2$

$Q(u/0)$

$R(-u/0)$

Für die Streckenlängen gilt: $\overline{QR} = u - (-u) = 2u$ und $\overline{PQ} = f(u) - 0 = f(u) = -u^2 + 4$

a) Der Umfang des Rechtecks soll maximal werden.

Die Formel für den Umfang lautet $U = 2 \cdot \overline{QR} + 2 \cdot \overline{PR}$

Die Zielfunktion lautet $U(u) = 2 \cdot 2u + 2 \cdot f(u) \Leftrightarrow U(u) = 4u + 2 \cdot (-u^2 + 4)$

$$U(u) = 4u - 2u^2 + 8 \quad \text{mit } 0 < u < 2$$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $U(u)$:

$$U'(u) = 4 - 4u \quad \text{und} \quad U''(u) = -4$$

Bedingung für ein relatives Maximum: $U'(u) = 0$ und $U''(u) < 0$

$$4 - 4u = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$U''(1) = -4 < 0 \quad \text{also relatives Maximum für } u = 1 \text{ mit } U(1) = 10 \text{ LE.}$$

Untersuchung der Randwerte: Es gilt $U(0) = 8$ und $U(2) = 8$.

Damit ist $U(1) = 10$ auch das absolute Maximum.

Für $P(1/f(1)) = P(1/3)$ ist der Umfang des Rechtecks maximal.

b) Der Inhalt des Rechtecks soll maximal werden.

Die Formel für den Flächeninhalt lautet $A = \overline{QR} \cdot \overline{PR}$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = 2u \cdot f(u) \Leftrightarrow A(u) = 2u \cdot (-u^2 + 4) = -2u^3 + 8u$ mit $0 < u < 2$.

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $A(u)$:

$$A'(u) = -6u^2 + 8 \quad \text{und} \quad A''(u) = -12u$$

Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

$$-6u^2 + 8 = 0 \Rightarrow u^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow u = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}, \quad \text{wobei nur } u = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ in Frage kommt.}$$

$$A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0 \quad \text{also relatives Maximum für } u = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15 \text{ mit } A\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6,16 \text{ FE}$$

Untersuchung der Randwerte: Es gilt $A(0) = 0$ und $A(2) = 0$.

Damit ist $A\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6,16 \text{ FE}$ auch das absolute Maximum.

Für $P(1,15/f(1,15)) = P(1,15/2,68)$ ist der Inhalt des Rechtecks maximal.

c) Bei Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht ein Zylinder.

Die Formel für das Zylindervolumen lautet $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \overline{OQ}^2 \cdot \overline{PQ}$

Die Zielfunktion lautet $V(u) = \pi \cdot u^2 \cdot f(u) = \pi \cdot u^2 \cdot (-u^2 + 4) = -\pi \cdot u^4 + 4\pi \cdot u^2$ mit $0 < u < 2$.

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $V(u)$:

$$V'(u) = -4\pi \cdot u^3 + 8\pi \cdot u \quad \text{und} \quad V''(u) = -12\pi \cdot u^2 + 8\pi$$

Bedingung für ein relatives Maximum: $V'(u) = 0$ und $V''(u) < 0$

$$-4\pi \cdot u^3 + 8\pi \cdot u = 0 \Rightarrow 4\pi u \cdot (-u^2 + 2) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $u = 0$ (kommt als Lösung nicht in Frage)

Gleichung II): $u^2 = 2 \Rightarrow u = \pm\sqrt{2}$ (es kommt nur $u = \sqrt{2}$ in Frage)

$$V''(\sqrt{2}) = -16\pi < 0 \quad \text{also relatives Maximum für } u = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ mit } V(\sqrt{2}) = 12,57$$

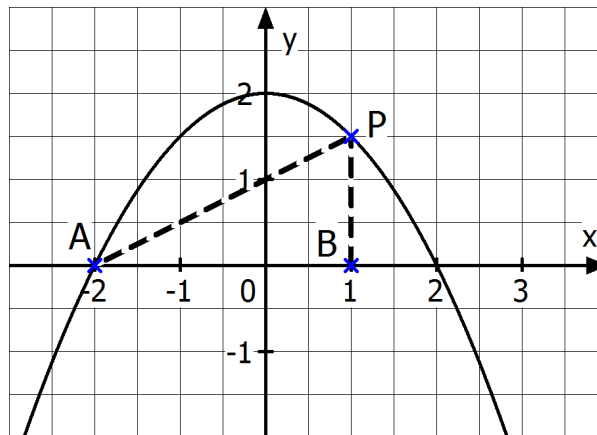
Untersuchung der Randwerte: Es gilt $V(0) = 0$ und $V(2) = 0$.

Damit ist $V(\sqrt{2}) = 12,57$ auch das absolute Maximum.

Für $P(1,41/f(1,41)) = P(1,41/2)$ ist das Volumen des Zylinders maximal.

Aufgabe 2:

Skizze von der Parabel und dem Dreieck:



Die allgemeinen Koordinaten der Punkte lauten: $P(u/f(u))$ $B(u/0)$ $A(-2/0)$

a) Die Fläche des Dreiecks soll maximal werden.

Die Formel für die Dreiecksfläche lautet $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BP}$

Mit den Koordinaten der Punkte ergibt sich $\overline{AB} = u - (-2) = u + 2$ und $\overline{BP} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $A_{\text{Dreieck}}(u) = \frac{1}{2}(u + 2) \cdot f(u) = \frac{1}{2}(u + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2 + 2\right)$ mit $-2 \leq u \leq 2$

$$A(u) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}u^3 + 2u - u^2 + 4 \right) = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 2$$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $A(u)$:

$$A'(u) = -0,75u^2 - u + 1 \quad \text{und} \quad A''(u) = -1,5u - 1$$

Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

$$-0,75u^2 - u + 1 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-0,75) \cdot 1}}{-1,5} = \frac{1 \pm 2}{-1,5} \quad \text{also} \quad u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad u_2 = -2$$

$$A''\left(-\frac{2}{3}\right) = -2 < 0, \quad \text{also relatives Maximum mit } A\left(\frac{2}{3}\right) \approx 2,39$$

$$A''(-2) = 2 > 0, \quad \text{also relatives Minimum}$$

Untersuchung der Randwerte: Es gilt $A(-2) = 0$ und $A(2) = 0$.

Damit ist $A\left(\frac{2}{3}\right) \approx 2,39$ auch das absolute Maximum.

Für $P(0,67/f(0,67)) = P(0,67/1,78)$ ist der Inhalt des Dreiecks maximal.

b) Die Summe der Kathetenlängen soll maximal werden.

Die Formel für die Summe der Kathetenlängen lautet $L = \overline{AB} + \overline{BP}$

Mit den Koordinaten der Punkte ergibt sich $\overline{AB} = u - (-2) = u + 2$ und $\overline{BP} = f(u) - 0 = f(u)$

$$\text{Die Zielfunktion lautet } L(u) = u + 2 + f(u) = u + 2 - \frac{1}{2}u^2 + 2 = -\frac{1}{2}u^2 + u + 4 \quad \text{mit } -2 \leq u \leq 2$$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $L(u)$:

$$L'(u) = -u + 1 \quad \text{und} \quad L''(u) = -1$$

Bedingung für ein relatives Maximum: $L'(u) = 0$ und $L''(u) < 0$

$$-u + 1 = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$L''(1) = -1 < 0, \quad \text{also relatives Maximum mit } L(1) = 4,5 \text{ LE}$$

Untersuchung der Randwerte: Es gilt $L(-2) = 0$ und $L(2) = 4$.

Damit ist $L(1) = 4,5$ LE auch das absolute Maximum.

Für $P(1/f(1)) = P(1/1,5)$ ist die Summe der Kathetenlängen maximal.

Aufgabe 3:

Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks lautet $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{QP}$.

Koordinaten der Eckpunkte: $O(0/0)$, $Q(u/0)$, $P(u/f(u))$

Die Streckenlängen betragen $\overline{OQ} = u - 0 = u$ und $\overline{QP} = f(u) - 0 = -u^2 + 4u$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = \frac{1}{2} u \cdot (-u^2 + 4u) = -\frac{1}{2} u^3 + 2u^2$ mit $0 < u < 4$.

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

Es gilt $A'(u) = -1,5u^2 + 4u$ und $A''(u) = -3u + 4$

Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

$-1,5u^2 + 4u = 0 \Rightarrow u \cdot (-1,5u + 4) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $u = 0$ (da $u > 0$ sein soll, ist dies keine Lösung)

Gleichung II): $-1,5u + 4 = 0 \Rightarrow u = \frac{8}{3}$

$A''(\frac{8}{3}) = -4 < 0$, also relatives Maximum mit $A(\frac{8}{3}) = 4,74$ FE

Untersuchung der Randwerte: Es gilt $A(0) = 0$ und $A(4) = 0$

Damit ist $A(\frac{8}{3}) = 4,74$ FE auch das absolute Maximum.

Aufgabe 4:

Koordinaten der Punkte P und Q:

$P(u/f(u))$ und $Q(u/g(u))$.

Die Streckenlänge beträgt $\overline{PQ}(u) = d(u) = f(u) - g(u) = 0,5u^2 - 4u + 13 - (-1,5u^2 + 6u - 4)$
 $= 2u^2 - 10u + 17$ mit $1 \leq u \leq 4$ (dies ist die Zielfunktion)

Gesucht ist das absolute Minimum der Zielfunktion.

Es gilt $d'(u) = 4u - 10$ und $d''(u) = 4$

Bedingung für ein relatives Minimum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) > 0$

$4u - 10 = 0 \Rightarrow u = 2,5$

$d''(2,5) = 4 > 0$, also relatives Minimum mit $d(2,5) = 4,5$ LE

Untersuchung der Randwerte: Es gilt $d(1) = 9$ und $d(4) = 9$

Damit existiert für $u = 2,5$ das absolute Minimum. Die minimale Streckenlänge beträgt 4,5 LE.