

Analysis

Extremwertaufgaben mit geometrischer Nebenbedingung

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2020

Aufgabe 1:

Aus einem 120cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, bei dem eine Kante dreimal so lang wie eine andere und der Rauminhalt möglichst groß ist. Bestimme das maximale Volumen. Auf die Untersuchung der Randwerte kann verzichtet werden.

Aufgabe 2:

Ein Draht der Länge 40 cm wird zu einem Rechteck gebogen mit der Länge r und der Breite h . Dieses soll dann um die Seite h rotieren. Bei welchen Abmessungen des Rechtecks hat der entstehende Zylinder größtes Volumen? Auf die Untersuchung der Randwerte kann verzichtet werden.

Aufgabe 3:

Einer Halbkugel mit Radius $r = 8$ cm ist ein gerader Kreiskegel mit größtmöglichem Volumen so einzubeschreiben, dass die Kegelspitze mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt. Wie groß ist das maximale Volumen? Auf die Untersuchung der Randwerte kann verzichtet werden.

Aufgabe 4:

Der Querschnitt eines Abwasserkanals hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Wie muss man bei gegebenem Kanalumfang $U = 10$ m die Rechtecksseiten wählen, damit die Querschnittsfläche (d.h. das Fassungsvermögen des Kanals) möglichst groß wird? Auf die Untersuchung der Randwerte kann verzichtet werden.

Aufgabe 5:

Es sollen zylinderförmige Kochtöpfe mit 2 Liter Volumen hergestellt werden. Wie sind der Durchmesser und die Höhe dieser Töpfe zu wählen, wenn die Länge der gesamten Schweißnaht, die am Bodenrand und längs einer Mantellinie verläuft, möglichst kurz werden soll? Auf die Untersuchung der Randwerte kann verzichtet werden.

Aufgabe 6:

Ein Zelt in der Form einer quadratischen Pyramide soll mit Hilfe von 4 Stäben der Länge 2,40 m aufgebaut werden. Wie groß kann das Volumen der Pyramide maximal werden? Auf die Untersuchung der Randwerte kann verzichtet werden.

Lösungen

Aufgabe 1:

Die Kantenlängen des Quaders seien a , $3a$ und b .

Volumen des Quaders: $V = a \cdot 3a \cdot b = 3a^2 \cdot b$

Da die Formel zwei Variablen enthält, wird eine Nebenbedingung benötigt, die sich aus der angegebenen Summe aller Kantenlängen ergibt:

$$4 \cdot a + 4 \cdot 3a + 4 \cdot b = 120 \Rightarrow 16a + 4b = 120 \Rightarrow b = 30 - 4a \quad (*)$$

Einsetzen von $(*)$ in die Volumenformel: $V(a) = 3a^2 \cdot (30 - 4a) = 90a^2 - 12a^3$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $V(a)$:

$$V'(a) = 180a - 36a^2 \quad \text{und} \quad V''(a) = 180 - 72a$$

Bedingung für ein Maximum: $V'(a) = 0$ und $V''(a) < 0$

$$180a - 36a^2 = 0 \Rightarrow a \cdot (180 - 36a) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $a = 0$ (ist keine sinnvolle Lösung)

Gleichung II): $180 - 36a = 0 \Rightarrow a = 5$

$$V''(5) = -180 < 0, \text{ also Maximum mit } V(5) = 750.$$

Das maximale Volumen beträgt 750 cm^3 .

Aufgabe 2:

Das Rechteck habe die Länge r und die Breite h und es soll um die Seite h rotieren. Dadurch entsteht ein Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r .

$$\text{Es gilt } V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Da die Formel zwei Variablen enthält, wird eine Nebenbedingung benötigt, die sich aus der angegebenen Drahtlänge ergibt:

$$2r + 2h = 40 \Rightarrow h = 20 - r \quad (*)$$

Einsetzen von $(*)$ in die Volumenformel: $V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot (20 - r) = 20\pi \cdot r^2 - \pi \cdot r^3$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $V(r)$:

$$V'(r) = 40\pi \cdot r - 3\pi \cdot r^2 \quad \text{und} \quad V''(r) = 40\pi - 6\pi \cdot r$$

Bedingung für ein Maximum: $V'(r) = 0$ und $V''(r) < 0$

$$40\pi \cdot r - 3\pi \cdot r^2 = 0 \Rightarrow \pi \cdot r \cdot (40 - 3r) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $r = 0$ (ist keine sinnvolle Lösung)

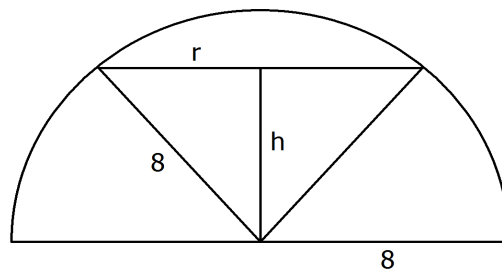
$$\text{Gleichung II): } 40 - 3r = 0 \Rightarrow r = \frac{40}{3} \approx 13,33 \text{ cm}$$

$$V''\left(\frac{40}{3}\right) = -125,7 < 0, \text{ also Maximum mit } V\left(\frac{40}{3}\right) = 3723,4 \text{ cm}^3$$

Das maximale Volumen beträgt $3723,4 \text{ cm}^3$.

Die Höhe dieses Zylinders beträgt $h = 20 - 13,33 = 6,66 \text{ cm}$.

Aufgabe 3:



Zu maximieren ist das Kegelvolumen mit der Formel $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

Da in dieser Formel zwei Variablen r und h enthalten sind, benötigt man noch eine Nebenbedingung.

Hier muss als Nebenbedingung der Satz des Pythagoras angewandt werden.

$$\text{Nebenbedingung: } r^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow r^2 = 64 - h^2$$

Nun muss die Nebenbedingung in die Volumenformel eingesetzt werden:

$$\text{Zielfunktion: } V(h) = \frac{1}{3} \pi \cdot (64 - h^2) \cdot h = \frac{64}{3} \pi \cdot h - \frac{1}{3} \pi \cdot h^3 \quad \text{mit } 0 \leq h \leq 8$$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $V(h)$:

$$V'(h) = \frac{64}{3} \pi - \pi \cdot h^2 \quad \text{und} \quad V''(h) = -2\pi \cdot h$$

Bedingung für ein Maximum: $V'(h) = 0$ und $V''(h) < 0$

$$\frac{64}{3} \pi - \pi \cdot h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow h = \pm \sqrt{\frac{64}{3}} \approx \pm 4,62$$

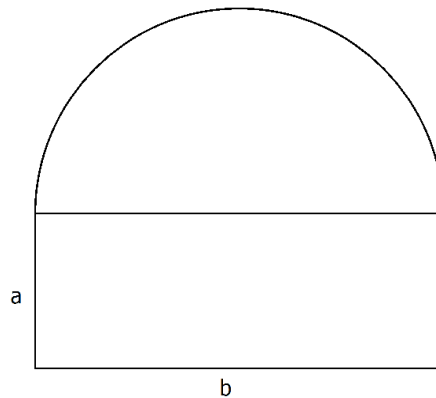
Da $h = -4,62$ keine sinnvolle Lösung ist, kommt nur $h = 4,62 \text{ cm}$ in Frage.

$$V''(4,62) \approx -29 < 0, \text{ also Maximum mit } V(4,62) = 206,4 \text{ cm}^3$$

Das maximale Volumen beträgt $V = 206,4 \text{ cm}^3$.

Aufgabe 4:

Skizze:



Zu maximieren ist die Querschnittsfläche: $A = a \cdot b + \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = a \cdot b + \frac{1}{8} \pi \cdot b^2$

Da in der Flächenformel zwei Variable vorkommen, wird eine Nebenbedingung benötigt.

Aufgrund des gegebenen Umfangs $U = 10$ m des Querschnittes gilt:

$$10 = a + a + b + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}b = 2a + b + \frac{1}{2} \pi \cdot b$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 - b - \frac{1}{2} \pi \cdot b}{2} = 5 - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4} \pi \cdot b$$

Eingesetzt in die Formel: $A(b) = \left(5 - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4} \pi \cdot b\right) \cdot b + \frac{1}{8} \pi \cdot b^2$

$$A(b) = 5b - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{8} \pi \cdot b^2$$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion $A(b)$:

$$A'(b) = 5 - b - \frac{1}{4} \pi b \quad \text{und} \quad A''(b) = -1 - \frac{1}{4} \pi$$

Bedingung für ein Maximum: $A'(b) = 0$ und $A''(b) < 0$

$$5 - b - \frac{1}{4} \pi \cdot b = 0 \Rightarrow b \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \pi\right) = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{1 + \frac{1}{4} \pi} \approx 2,8$$

$$A''(2,8) \approx -1,79 < 0, \text{ also Maximum mit } A(2,8) \approx 7 \text{ m}^2.$$

Die maximale Fläche beträgt 7 m^2 .

Aufgabe 5:

Zu minimieren ist die Länge der Schweißnaht: $L = 2 \cdot \pi \cdot r + h$

Da in dieser Formel zwei Variablen r und h enthalten sind, benötigt man noch eine Nebenbedingung.

Hier muss als Nebenbedingung das gegebene Volumen genutzt werden:

(2 Liter = 2 dm³, das heißt die Längen r und h haben die Einheit dm)

$$\text{Nebenbedingung: } 2 = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{2}{\pi \cdot r^2}$$

Nun muss die Nebenbedingung in die Längenformel eingesetzt werden:

$$\text{Zielfunktion: } L(r) = 2\pi \cdot r + \frac{2}{\pi \cdot r^2} = 2\pi \cdot r + \frac{2}{\pi} \cdot r^{-2}$$

Bestimmung des Minimums der Zielfunktion $L(r)$:

$$L'(r) = 2\pi - \frac{4}{\pi} r^{-3} = 2\pi - \frac{4}{\pi \cdot r^3} \quad \text{und} \quad L''(r) = \frac{12}{\pi} r^{-4} = \frac{12}{\pi \cdot r^4}$$

Bedingung für ein Minimum: $L'(r) = 0$ und $L''(r) > 0$

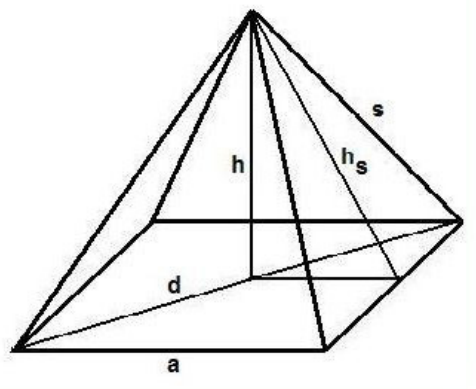
$$2\pi - \frac{4}{\pi \cdot r^3} = 0 \Rightarrow 2\pi \cdot r^3 - \frac{4}{\pi} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{2}{\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}} \approx 0,587$$

$$L''(0,587) = \frac{12}{\pi \cdot 0,587^4} > 0 \quad \text{also Minimum mit } L(0,587) \approx 5,54 \text{ dm.}$$

Die minimale Schweißnahtlänge beträgt 5,54 dm.

Aufgabe 6:

Zu maximieren ist das Pyramidenvolumen $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$



Da in dieser Formel zwei Variablen a und h enthalten sind, benötigt man noch eine Nebenbedingung.

Hier muss als Nebenbedingung die gegebene Seitenlänge $s = 2,40$ m genutzt werden.

Mit dem Satz des Pythagoras folgt: $s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

Für die Diagonale d gilt: $d = a \cdot \sqrt{2}$

Damit gilt: $s^2 = h^2 + \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow 2,4^2 = h^2 + \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow a^2 = 2 \cdot (2,4^2 - h^2)$

Nun muss die Nebenbedingung in die Volumenformel eingesetzt werden:

Zielfunktion: $V(h) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (2,4^2 - h^2) \cdot h = 3,84h - \frac{2}{3}h^3$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion V(h):

$$V'(h) = 3,84 - 2h^2 \quad \text{und} \quad V''(h) = -4h$$

Bedingung für ein Maximum: $V'(h) = 0$ und $V''(h) < 0$

$$3,84 - 2h^2 = 0 \Rightarrow h = \pm \sqrt{\frac{48}{25}} \approx \pm 1,386$$

Da $h > 0$ sein muss, folgt $h = \sqrt{\frac{48}{25}} = \frac{\sqrt{48}}{5}$

$$V''\left(\frac{\sqrt{48}}{5}\right) < 0$$

Somit liegt bei $h = \frac{\sqrt{48}}{5}$ ein Maximum vor mit $V\left(\frac{\sqrt{48}}{5}\right) \approx 3,55 \text{ m}^3$

Das maximale Volumen beträgt $3,55 \text{ m}^3$.