

Analysis

Wahlteilaufgabe: Geschwindigkeit Kugel

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Berufliche Gymnasien: ab Klasse 12

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Die Geschwindigkeit einer in einer Flüssigkeit sinkenden Metallkugel lässt sich durch eine Funktion v mit

$$v(t) = \frac{10}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) , \quad a > 0$$

beschreiben (t in Sekunden nach Beginn des Sinkvorgangs, $v(t)$ in m/s).

- a) Für eine Kugel K_1 gilt: Ihre Geschwindigkeit nähert sich mit zunehmender Sinkdauer dem Wert 14 m/s an.

Berechne den Wert des Parameters a für die Kugel K_1 .

Skizziere für diese Kugel K_1 das Schaubild von v .

Wann überschreitet die Geschwindigkeit der Kugel 5 m/s?

Zeige, dass die Geschwindigkeit der Kugel ständig zunimmt.

Berechne die Länge des nach zwei Sekunden zurückgelegten Wegs.

(Teilergebnis: $a = 0,71$)

- b) Für eine zweite Kugel K_2 gilt $a = 0,5$.

Diese beginnt drei Sekunden nach der Kugel K_1 von der gleichen Stelle aus zu sinken.

Skizziere das Schaubild der Geschwindigkeit von K_2 im vorhandenen

Koordinatensystem.

Zeige rechnerisch, dass der Vorsprung von K_1 nach ca. 5,3 Sekunden am größten ist.

- c) Für eine dritte Kugel K_3 gilt $a = 1,15$.

Zeige, dass diese Kugel während der zweiten Sekunde des Sinkvorgangs ungefähr doppelt so weit sinkt wie während der ersten Sekunde.

Lösungen

a) Es soll gelten:

Für $t \rightarrow +\infty$ gilt $v(t) \rightarrow 14$ (dies entspricht der waagrechten Asymptote)

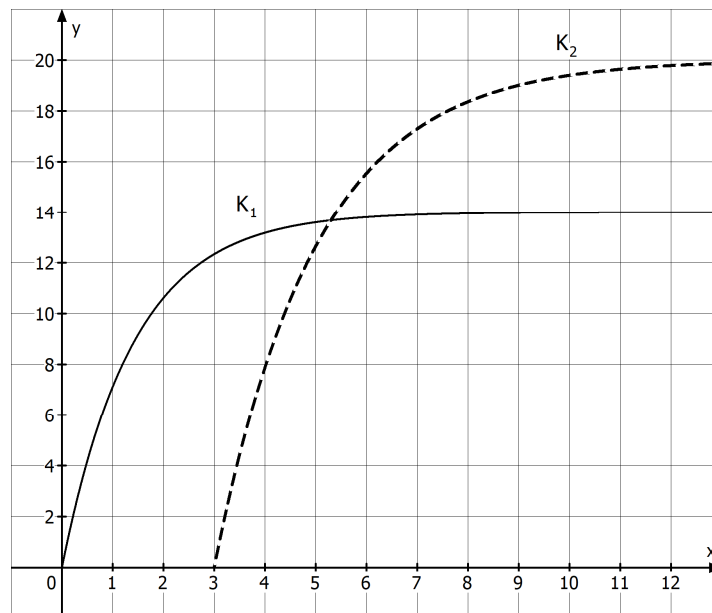
Allgemein gilt:

Für $t \rightarrow +\infty$ gilt $v(t) \rightarrow \frac{10}{a}$ (da $e^{-at} \rightarrow 0$ läuft)

Es soll gelten: $\frac{10}{a} = 14 \Rightarrow a = \frac{5}{7} \approx 0,71$

Skizze der Funktion $v_1(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0,71t})$ (mit Wertetabelle des WTR)

und der Funktion $v_2(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0,5(t-3)})$ (siehe Teilaufgabe b))



Überschreitung der Geschwindigkeit von 5 m/s:

Berechnung des Zeitpunktes, wann die Kugel K_1 eine Geschwindigkeit von 5m/s besitzt:

$$v_1(t) = 5 \Rightarrow 14 \cdot (1 - e^{-0,71t}) = 5 \Rightarrow 1 - e^{-0,71t} = \frac{5}{14} \Rightarrow e^{-0,71t} = 0,643 \Rightarrow t = 0,62$$

Nach ca. 0,62 Sekunden überschreitet die Kugel die Geschwindigkeit von 5 m/s.

Nachweis, dass Geschwindigkeit ständig zunimmt:

Zu zeigen ist, dass die Funktion $v(t)$ streng monoton wächst.

Bedingung: $v'_1(t) > 0$

$$v'_1(t) = 14 \cdot (-(-0,71) \cdot e^{-0,71t}) = 9,94e^{-0,71t} > 0$$

Daher ist $v_1(t)$ streng monoton wachsend.

Länge des Wegs nach 2 Sekunden:

$$\int_0^2 v_1(t) dt = \int_0^2 (14 \cdot (1 - e^{-0,71t})) dt = \left[14 \cdot \left(t + \frac{1}{0,71} e^{-0,71t} \right) \right]_0^2 = 32,77 - 19,72 = 13,05 \text{ Meter}$$

- b) Da die zweite Kugel erst 3 Sekunden nach der ersten Kugel sinkt, muss das Schaubild um 3 Einheiten nach rechts verschoben werden.

Die Funktionsgleichung lautet $v_2(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0,5 \cdot (t-3)})$

Die Skizze des Schaubildes findet sich in Teilaufgabe a).

Größter Vorsprung:

Der Vorsprung der ersten Kugel wächst so lange, wie die Geschwindigkeit der ersten Kugel größer ist als die der zweiten Kugel.

Der Zeitpunkt des größten Vorsprungs entspricht daher dem Schnittpunkt der Schaubilder von $v_1(t)$ und $v_2(t)$

$$v_1(t) = v_2(t)$$

Zu kontrollieren ist, ob folgende Gleichung gilt: $v_1(5,3) = v_2(5,3)$

Es gilt $v_1(5,3) = v_2(5,3) \approx 13,7$

Somit haben die Kugeln nach 5,3 Sekunden den größten Abstand.

- c) Für die dritte Kugel gilt die Gleichung $v_3(t) = \frac{200}{23} \cdot (1 - e^{-1,15t})$

Weg in der ersten Sekunde:

$$\int_0^1 v_3(t) dt = \int_0^1 \left(\frac{200}{23} \cdot (1 - e^{-1,15t}) \right) dt = \left[\frac{200}{23} \cdot \left(t + \frac{1}{1,15} e^{-1,15t} \right) \right]_0^1 = 11,09 - 7,56 = 3,53 \text{ Meter}$$

Weg in der zweiten Sekunde:

$$\int_1^2 v_3(t) dt = \int_1^2 \left(\frac{200}{23} \cdot (1 - e^{-1,15t}) \right) dt = \left[\frac{200}{23} \cdot \left(t + \frac{1}{1,15} e^{-1,15t} \right) \right]_1^2 = 18,15 - 11,09 = 7,06 \text{ Meter}$$

Die Strecke in der zweiten Sekunde ist doppelt so groß wie die Strecke in der ersten Sekunde, was zu zeigen war.