

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

2

In einem Gewächshaus einer Gärtnerei werden Blumen gezüchtet, deren Blüten die Farben rot (R), violett (V) oder blau (B) haben.

Dabei können aus Samen von Blumen in der nächsten Generation auch Blumen einer anderen Farbe entstehen. Dieses Änderungsverhalten ist in der Tabelle dargestellt.

von nach	R	V	B
R	0,4	0,2	0
V	0,6	0,6	0,6
B	0	0,2	0,4

Beispielsweise bedeutet dies, dass aus dem Samen einer roten Blume mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% eine rote und mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% eine violette Blume in der nächsten Generation entsteht.

- 2.1 Die Gesamtzahl der Blumen bleibt von Generation zu Generation unverändert. Nennen sie die Eigenschaft der zugehörigen Übergangsmatrix, die dies garantiert.

Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm. (4 Punkte)

- 2.2 Zu Beginn einer Beobachtung befinden sich 9000 Blumen im Gewächshaus, von denen 2000 rot und 6 mal so viele violett wie blau sind.

Berechnen Sie die zu erwartenden prozentualen Anteile von Blumen verschiedener Farben in der nächsten Generation. (4 Punkte)

- 2.3 Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Stimmen die Anzahlen der Blumen der verschiedenen Farben in einer Generation überein, so ist deren Verhältnis in der nächsten Generation 1:3:1. In den folgenden Generationen ändert sich dann dieses Verhältnis nicht mehr.“

(3 Punkte)

- 2.4 Zu einem anderen Zeitpunkt befinden sich 1000 rote, 5400 violette und 2600 blaue Blumen im Gewächshaus.

Ermitteln Sie mit Hilfe des Modells jeweils die minimale und maximale Anzahl blauer Blumen der vorherigen Generation.

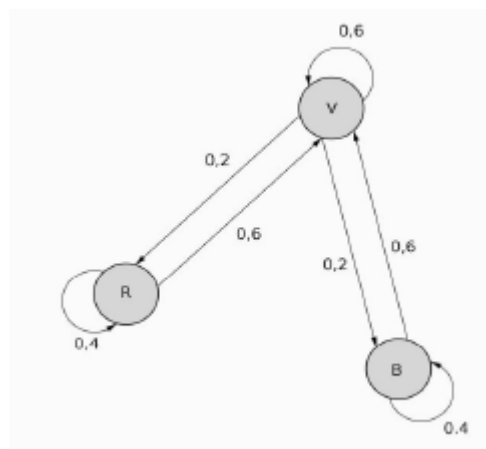
(4 Punkte)

Lösungen

- 2.1. Die Gesamtanzahl der Blumen bleibt von Generation zu Generation unverändert, da die Spaltensumme der Übergangsmatrix jeweils den Wert 1 haben.

$$\text{Übergangsmatrix: } M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Übergangsdiagramm:



- 2.2 Von den 9000 Blumen sind 2000 rot.
Die restlichen 7000 Blumen sind violett und blau.
Das Verhältnis violett zu blau beträgt 6:1.

Damit sind $7000 \cdot \frac{1}{7} = 1000$ Blumen blau und $7000 \cdot \frac{6}{7} = 6000$ Blumen violett.

Blumenanzahl in der nächsten Generation:

$$\vec{x}_1 = M \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 6000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 5400 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

Man erwartet 2000 rote, 5400 violette und 1600 blaue Blumen in der Folgegeneration.

Prozentuale Verteilung:

$$\text{Rot: } \frac{2000}{9000} \approx 0,222 = 22,2\% \quad \text{Violett: } \frac{5400}{9000} = 0,6 = 60\%$$

$$\text{Blau: } \frac{1600}{9000} \approx 0,178 = 17,8\%$$

2.3 Wenn die Anzahl aller Blumen gleich sind, gilt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\vec{x}_1 = M \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6a \\ 1,8a \\ 0,6a \end{pmatrix}$$

Das Verhältnis $0,6 : 1,8 : 0,6$ kann gekürzt werden auf $1 : 3 : 1$ (Division der Zahlen durch $0,6$).

Somit ist das Verhältnis in der Folgegeneration $1 : 3 : 1$.
Der erste Teil der Aussage ist wahr.

$$\text{Falls } \vec{x}_n = \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ a \end{pmatrix} \text{ gilt, dann gilt } \vec{x}_{n+1} = M \cdot \vec{x}_n = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ a \end{pmatrix}$$

Damit bleibt das Verhältnis $1 : 3 : 1$ bestehen und der zweite Teil der Aussage ist ebenfalls wahr.

$$2.4 \quad M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 5400 \\ 2600 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcl} (1) & 0,4x & +0,2y & = & 1000 \\ (2) & 0,6x & +0,6y & +0,6z & = & 5400 \\ (3) & & 0,2y & +0,4z & = & 2600 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (1)^* = (1) & 0,4x & +0,2y & = & 1000 \\ (2)^* = 0,6 \cdot (1) - 0,4 \cdot (2) & & -0,12y & -0,24z & = & -1560 \\ (3)^* = (3) & & 0,2y & +0,4z & = & 2600 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (1)^{**} = (1)^* & 0,4x & +0,2y & = & 1000 \\ (2)^{**} = (2)^* & & -0,12y & -0,24z & = & -1560 \\ (3)^{**} = 0,2 \cdot (2)^* + 0,12 \cdot (3)^* & & 0 & & = & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Wähle $z = t$.

Aus der 2. Zeile folgt: $-0,12y - 0,24t = -1560 \Leftrightarrow y = 13000 - 2t$

Aus der 1. Zeile folgt: $0,4x + 0,2(13000 - 2t) = 1000 \Leftrightarrow x = -4000 + t$

Gesucht sind nun die Werte, die t (Anzahl blauer Blumen) annehmen kann.

Alle 3 Variablen x , y und z müssen ganzzahlig und nicht negativ sein.

Daraus folgt:

$$z = t \geq 0$$

$$y = 13000 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6500$$

$$x = -4000 + t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 4000$$

Die Anzahl der blauen Blumen beträgt mindestens 4000 und höchstens 6500.