

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 1 In einem Aufbauspiel können Spieler drei Arten von Bauwerken errichten.

Der Materialeinsatz in Mengeneinheiten (ME) für jedes dieser Bauwerke ist in der Tabelle dargestellt.

	Festung	Hütte	Straße
Steine	20	1	5
Holz	8	2	0
Lehm	5	2	1

1.1 Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 20 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Interpretieren Sie die Rechnung im Sachkontext. (2 Punkte)

- 1.2 Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Für den Bau von jeweils 5 Festungen, Hütten und Straßen werden 20% weniger Mengeneinheiten Lehm als Holz benötigt.“ (2 Punkte)

- 1.3 Ein Spieler hat für seine Bauwerke 34 ME Steine, 16 ME Holz und eine zunächst unbekannte Menge an Lehm eingesetzt. Neben Festungen und Hütten hat der Spieler damit zwei Straßen gebaut.
Bestimmen Sie die Anzahl an Festungen und Hütten sowie die Menge an Lehm, die der Spieler gebaut bzw. eingesetzt hat. (4 Punkte)

- 1.4 Ein Spieler hat 80 ME Lehm, die er vollständig in die Erstellung von Bauwerken investieren will. Allerdings möchte er keine Straßen bauen und die Anzahl der Hütten und Festungen soll sich möglichst wenig unterscheiden.
Ermitteln Sie, wie viele Festungen der Spieler dann erstellt, und geben Sie die benötigten ME an Steinen an. (4 Punkte)

- 1.5 Die Materialkosten für eine Festung betragen mit 405 Geldeinheiten (GE) das Neunfache der Materialkosten, die für eine Hütte anfallen.
Die Kosten für eine ME Lehm betragen 5 GE.
Ermitteln Sie die Materialkosten, die beim Bau einer Straße anfallen. (3 Punkte)

Lösungen

$$1.1 \quad \begin{pmatrix} 20 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Interpretation:

Um 1 Festung und 1 Hütte zu bauen, benötigt man 21 ME Steine, 10 ME Holz und 7 ME Lehm.

$$1.2 \quad \begin{pmatrix} 20 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Für den Bau werden 40 ME Holz und 50 ME Lehm benötigt.

Wegen $\frac{40}{50} = 0,8$ benötigt man 20% weniger ME Lehm als ME Holz.

Die Aussage ist wahr.

$$1.3 \quad \text{Bedingung: } \begin{pmatrix} 20 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 16 \\ z \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$20x + y + 10 = 34$$

$$8x + 2y = 16$$

$$5x + 2y + 2 = z$$

Aus der 1. Zeile folgt: $y = 24 - 20x$

Einsetzen in die 2. Zeile: $8x + 2(24 - 20x) = 16 \Leftrightarrow -32x = -32 \Leftrightarrow x = 1$

Daraus folgt $y = 24 - 20 = 4$

Aus der 3. Zeile folgt: $5 + 8 + 2 = z \Leftrightarrow z = 15$

Der Spieler hat eine Festung und vier Hütten gebaut sowie 15 ME Lehm eingesetzt.

$$1.4 \quad \begin{pmatrix} 20 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 80 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$20x + y = a$$

$$8x + 2y = b$$

$$5x + 2y = 80$$

Aus der 3. Zeile folgt: $y = 40 - 2,5x$

Da $x \geq 0$ und x ganzzahlig sein muss, kommen nur folgende Werte in Frage:
 $x \in \{0, 2, 4, \dots, 16\}$

Für $x = 10$ ergibt sich $y = 15 \rightarrow$ der Unterschied beträgt 5.

Für $x = 12$ ergibt sich $y = 10 \rightarrow$ der Unterschied beträgt 2.

Für $x = 14$ ergibt sich $y = 5 \rightarrow$ der Unterschied beträgt 9.

Der kleinste Unterschied gilt für $x = 12$ und $y = 10$.

Daraus folgt $a = 250$.

Der Spieler erstellt 12 Festungen und benötigt hierfür 250 ME Steine.

1.6 Die Stückkosten für Stein, Holz und Lehm seien

$$k_{\text{Stein}} = ?$$

$$k_{\text{Holz}} = ?$$

$$k_{\text{Lehm}} = 5$$

Kosten für eine Festung:

$$20 \cdot k_{\text{Stein}} + 8 \cdot k_{\text{Holz}} + 5 \cdot 5 = 405 \Leftrightarrow 20 \cdot k_{\text{Stein}} + 8 \cdot k_{\text{Holz}} = 380$$

Kosten für eine Hütte:

$$1 \cdot k_{\text{Stein}} + 2 \cdot k_{\text{Holz}} + 2 \cdot 5 = \frac{405}{9} \Leftrightarrow k_{\text{Stein}} + 2 \cdot k_{\text{Holz}} = 35$$

Aus der 2. Gleichung folgt $k_{\text{Stein}} = 35 - 2 \cdot k_{\text{Holz}}$

Einsetzen in die 1. Gleichung: $20 \cdot (35 - 2 \cdot k_{\text{Holz}}) + 8 \cdot k_{\text{Holz}} = 380 \Leftrightarrow k_{\text{Holz}} = 10$

Daraus folgt $k_{\text{Stein}} = 35 - 2 \cdot 10 = 15$

Kosten für eine Straße: $5 \cdot 15 + 1 \cdot 5 = 80$ GE