

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

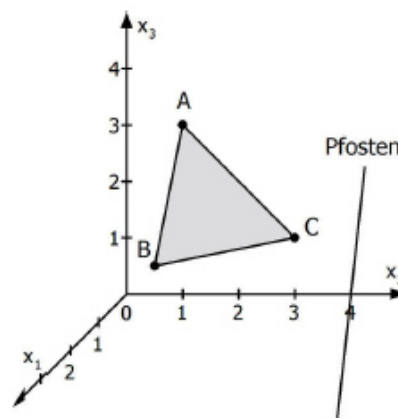
Lineare Algebra: Vektorgeometrie

2

Die Punkte $A(2|2|4)$, $B(3|2|2)$ und $C(4|5|3)$ sind die Eckpunkte eines über dem Boden (x_1, x_2 -Ebene) aufgespannten ebenen Sonnensegels.

Zur Befestigung dient unter anderem ein Pfosten, der sich durch die Strecke

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1,$$



beschreiben lässt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

- 2.1 Geben Sie den kleinsten Abstand des Sonnensegels zum Boden an. Zeigen Sie, dass das Sonnensegel in der Ebene mit der Gleichung $2x_1 - x_2 + x_3 = 6$ liegt. (3 Punkte)
- 2.2 Der für die Herstellung des Sonnensegels benötigte Stoff kostet 21 € pro Quadratmeter. Dabei fallen zum benötigten Flächeninhalt zusätzlich 10% Verschnitt an. Berechnen Sie die Kosten. (3 Punkte)
- 2.3 Der Punkt C ist mit einem Seil an dem Pfosten befestigt. Beurteilen Sie, ob ein Seil der Länge 1,85 m dafür ausreichend ist. (4 Punkte)
- 2.4 Robert blickt von Position $P(1|2|1,5)$ aus in Richtung Sonne. Das Sonnenlicht fällt aus der Richtung $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein. Untersuchen Sie, ob Robert vom Sonnenlicht geblendet wird. (5 Punkte)

Lösungen

- 2.1 Von den drei Eckpunkten A, B und C hat der Punkt B den kleinsten Abstand zum Boden, da B die kleinste x_3 -Koordinate hat.

Der kleinste Abstand zum Boden ist 2 Meter.

- 2.2 Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{54} \text{ m}^2$$

$$\text{Kosten in Euro: } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{54} \cdot 1,1 \cdot 21 \approx 84,87 \text{ Euro}$$

- 2.3 Gesucht ist der Abstand des Punktes C(4|5|3) von der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ein allgemeiner Geradenpunkt der Geraden hat die Koordinaten $G(4,5+t | 6+t | 5t)$.

Der Vektor $\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 0,5+t \\ 1+t \\ 5t-3 \end{pmatrix}$ muss orthogonal zu g sein.

$$\text{Bedingung: } \begin{pmatrix} 0,5+t \\ 1+t \\ 5t-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0,5+t+1+t+25t-15=0 \Leftrightarrow t=0,5$$

Der Punkt G auf der Geraden hat die Koordinaten $G(5|6,5|2,5)$.

$$\text{Abstand von C zur Geraden: } |\overrightarrow{CG}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+2,25+0,25} = \sqrt{3,5} \approx 1,87$$

Ein Seil der Länge 1,85 m ist nicht ausreichend.

2.4 Das Sonnenlicht durch den Punkt P liegt auf der Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Schnittpunktes von g und E:

$$2(1+4t) - (2+2t) + 1,5 + 3t = 6 \Leftrightarrow 9t = 4,5 \Leftrightarrow t = 0,5$$

Einsetzen von $t = 0,5$ in g ergibt den Schnittpunkt $S(3|3|3)$.

Nun muss überprüft werden, ob der Schnittpunkt S innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

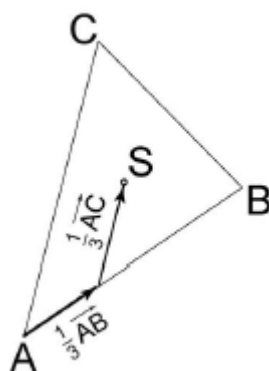
$$\text{Kontrolle: } \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{2. Zeile: } 3 = 2 + 3s \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$\text{1. Zeile: } 3 = 2 + r + \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

Da $0 \leq r, s \leq 1$ gilt und außerdem $r + s \leq 1$ ist, liegt S innerhalb des Dreiecks ABC.



Robert wird daher nicht geblendet.