

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 1 Gegeben sind die Punkte $A(6|0|4)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|4)$ und $D(4|4|8)$ sowie der Punkt $S(-1|-1|6)$.

Die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$ enthält die Punkte A, B, C und D.

- 1.1 Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist. (3 Punkte)
- 1.2 Zeichnen Sie die Pyramide ABCDS in ein geeignetes Koordinatensystem. (3 Punkte)
- 1.3 Der Punkt M ist der Schnittpunkt der Diagonalen von ABCD. Zeigen Sie, dass die Strecke MS orthogonal zu E ist und dass die Höhe der Pyramide ABCDS 6 Längeneinheiten beträgt. (3 Punkte)
- 1.4 Begründen Sie, dass alle Pyramiden mit der Grundfläche ABCD, deren Spitzen zudem auf der Geraden g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

liegen, das gleiche Volumen haben. (2 Punkte)

- 1.5 Die Spitze H der Pyramide ABCDH liegt auf der Geraden h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

Das Volumen der Pyramide ABCDH ist doppelt so groß wie das Volumen der Pyramide ABCDS. Ermitteln Sie die Koordinaten eines solchen Punktes H. (4 Punkte)

Lösungen

1.1 Zunächst wird überprüft, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

$$\text{Es gilt: } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ handelt es sich um ein Parallelogramm.

Kontrolle, ob das Parallelogramm ABCD ein Rechteck ist:
Hierbei genügt es zu zeigen, dass in einem Punkt des Parallelogramms ein rechter Winkel vorliegt.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 + 8 - 16 = 0 \text{ stehen die Vektoren orthogonal}$$

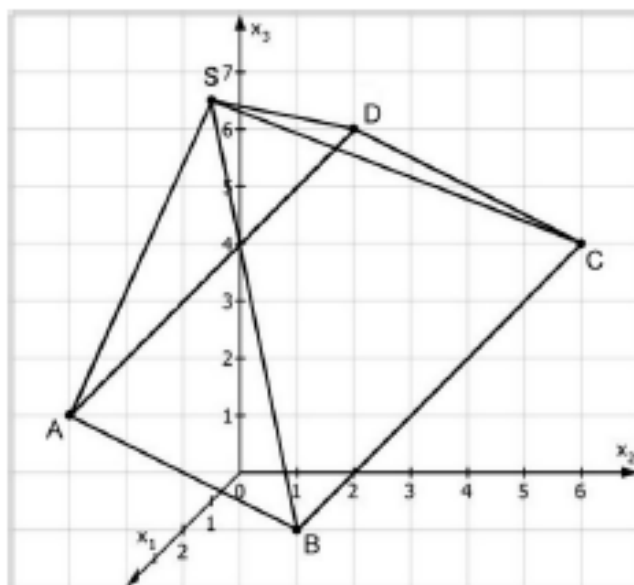
zueinander. Damit existiert im Punkt B ein rechter Winkel.

Kontrolle, ob das Rechteck ABCD ein Quadrat ist:

$$\text{Es gilt } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6.$$

Damit haben alle vier Seiten die Länge 6.

1.2 Zeichnung der Pyramide:



1.3 Berechnung des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{AC}$:

$$M\left(\frac{6+0}{2} \mid \frac{0+6}{2} \mid \frac{4+4}{2}\right) \Rightarrow M(3 \mid 3 \mid 4)$$

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Vielfacher Vektor von $\overrightarrow{MS}$ ist, steht die

Strecke MS orthogonal zu E.

Da die Strecke MS senkrecht zu E steht, entspricht die Höhe der Pyramide der Länge der Strecke MS.

$$\text{Es gilt: } |\overrightarrow{MS}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$$

1.4 Die Pyramiden haben dasselbe Volumen, wenn sie die gleiche Höhe besitzen (da die Grundfläche bei allen Pyramiden identisch ist).

Die Höhen sind dann gleich, wenn die Gerade g parallel zur Ebene liegt, in der die Grundfläche ABCD liegt.

$$\text{Wegen } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ ist g parallel zu E.}$$

Da der Punkt S(-1|-1|6) auf der Gerade liegt, haben alle Pyramiden gemäß Aufgabe 1.3 die Höhe 6 LE.

1.5 Das Volumen der Pyramide wird berechnet mit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{\text{Pyr}}$.

Da die Pyramide ein doppelt so großes Volumen haben soll und die Grundfläche ABCD gleichbleibt, muss die Pyramide die doppelte Höhe 12 besitzen.

Der gesuchte Punkt H liegt auf der Geraden h.

Er hat die allgemeinen Koordinaten $H(-1+3t \mid -1+5t \mid 6-2t)$.

$$\text{HNF von E: } \frac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 8}{3} = 0$$

$$d(H,E) = \frac{|2(-1+3t) + 2(-1+5t) - (6-2t) - 8|}{3} = \frac{|18t-18|}{3}$$

$$\text{Bedingung: } \frac{|18t-18|}{3} = 12 \Leftrightarrow |18t-18| = 36$$

$$\text{Fall 1: } 18t-18 = 36 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\text{Fall 2: } 18t-18 = -36 \Leftrightarrow t = -1$$

Ein möglicher Punkt wäre $H(8|14|0)$.

Ein weiterer möglicher Punkt wäre $H(-4|-6|8)$.