

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Anwendungsorientierte Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

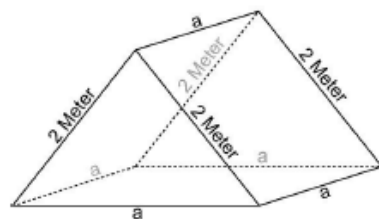
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Anwendungsorientierte Analysis

4.1

Ein Hersteller plant ein Zelt, dessen Gerüst aus neun Stangen besteht. Vier Stangen haben jeweils die Länge zwei Meter und die Länge der restlichen fünf Stangen (in Meter) wird mit a bezeichnet (siehe Abbildung rechts). Aus praktischen Gründen soll $1 \leq a \leq 3,5$ gelten.



4.1.1 Berechnen Sie die Höhe des Zeltes für den Fall $a = 3$. (2 Punkte)

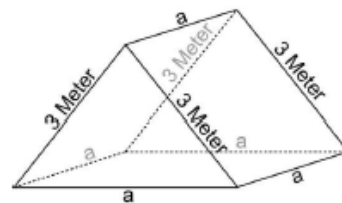
4.1.2 Die Funktion V mit $V(a) = \sqrt{E(a)}$ und $E(a) = a^4 - \frac{1}{16}a^6$ beschreibt das Volumen des Zeltes in Abhängigkeit von a .
 V nimmt an der gleichen Stelle wie E den maximalen Wert an.
 Berechnen Sie den Wert von a , für den das Volumen des Zeltes maximal ist.
 Geben Sie das maximale Volumen an.

(5 Punkte)

4.2

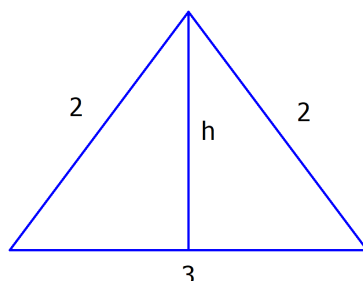
Für ein größeres Zelt werden die zwei Meter langen Stangen durch drei Meter lange Stangen ersetzt (siehe Abbildung rechts). Das Volumen dieses Zeltes kann durch den

Term $\sqrt{c \cdot a^4 - \frac{1}{16}a^6}$ berechnet werden.



Ermitteln Sie den Wert von c .

(3 Punkte)

Lösungen**4.1.1 Höhe des Zeltes:**

Satz des Pythagoras: $h^2 = 2^2 - 1,5^2 \Rightarrow h = \sqrt{1,75}$ Meter

- 4.1.2 Gesucht ist das globale Maximum der Funktion $V(a)$.
Laut Aufgabenstellung kann der zugehörige Wert von a über die Funktion $E(a)$ ermittelt werden.

Hinreichende Bedingung für das lokale Maximum: $E'(a) = 0$ und $E''(a) < 0$

$$E'(a) = 4a^3 - \frac{3}{8}a^5$$

$$E''(a) = 12a^2 - \frac{15}{8}a^4$$

$$4a^3 - \frac{3}{8}a^5 = 0 \Leftrightarrow a^3 \cdot \left(4 - \frac{3}{8}a^2\right) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{Gleichung II): } 4 - \frac{3}{8}a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{32}{3} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{32}{3}}$$

Wegen $1 \leq a \leq 3,5$ kommt nur $a = \sqrt{\frac{32}{3}}$ in Betracht.

$$E''\left(\sqrt{\frac{32}{3}}\right) < 0$$

Damit liegt bei $a = \sqrt{\frac{32}{3}}$ ein relatives Maximum vor.

$$\text{Es gilt } E\left(\sqrt{\frac{32}{3}}\right) \approx 37,9$$

Untersuchung der Randwerte bei $a = 1$ und $a = 3,5$:

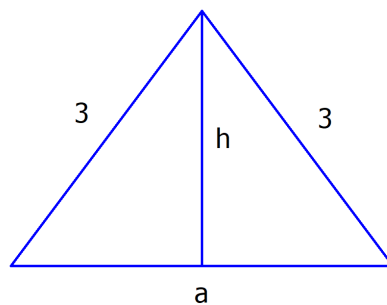
$$E(1) = 0,9375 \quad \text{und} \quad E(3,5) = 35,2$$

Beide Randwerte sind kleiner als 37,9.

Das globale Maximum existiert daher für $a = \sqrt{\frac{32}{3}}$.

Das maximale Volumen beträgt $V(\sqrt{\frac{32}{3}}) = 6,16$ Kubikmeter

4.2 Volumen des Dreiecksprismas: $V = A_{\text{Dreieck}} \cdot h_{\text{Prisma}}$



Es gilt $h_{\text{Prisma}} = a$.

Höhe des Dreiecks mit Pythagoras: $h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{1}{4}a^2}$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{9 - \frac{1}{4}a^2}$$

Volumen des Zeltes:

$$V = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{9 - \frac{1}{4}a^2} \cdot a = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sqrt{9 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^4} \cdot \sqrt{9 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^4 - \frac{1}{16}a^6}$$

Durch den Abgleich mit dem Term $\sqrt{c \cdot a^4 - \frac{1}{16}a^6}$ aus der Aufgabenstellung

ergibt sich $c = \frac{9}{4}$.