

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Anwendungsorientierte Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Anwendungsorientierte Analysis

- 2.1 In der Küche eines Hauses werden zum selben Zeitpunkt eine kleine und eine große Teekanne mit kochendem Wasser gefüllt. Die Temperaturverläufe des Wassers in °C werden durch die Funktionen f und g beschrieben.

Für die kleine Teekanne gilt: $f(t) = 20 + 80 \cdot e^{-0,06 \cdot t}$; $t \geq 0$

Für die große Teekanne gilt: $g(t) = 20 + 80 \cdot e^{-0,04 \cdot t}$; $t \geq 0$

Hierbei wird die Zeit t in Minuten gemessen.

Der Zeitpunkt der Befüllung ist $t = 0$.

2.1.1

Die Temperaturverläufe sind in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

Ordnen Sie die Kurven A und B den Funktionen f und g zu.

Geben Sie die Raumtemperatur in der Küche an.

Zeigen Sie: Die Wassertemperatur in der kleinen Teekanne beträgt 20 Minuten nach dem Befüllen etwa 44°C.



(3 Punkte)

- 2.1.2 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem sich die Wassertemperaturen der beiden Teekannen am stärksten voneinander unterscheiden.

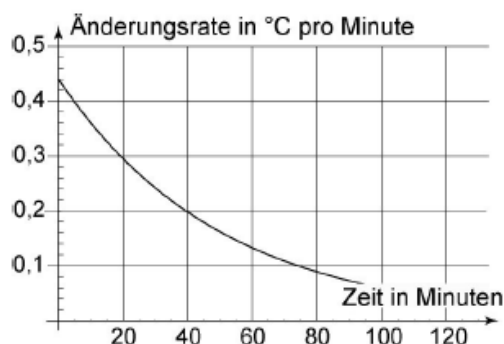
(4 Punkte)

2.2

In den Heizungskeller wird ein Eimer mit 10°C kaltem Wasser gestellt.

Die momentane Änderungsrate a der Wassertemperatur ab dem Zeitpunkt des Abstellens ist im nebenstehenden Schaubild dargestellt.

Es ist bekannt: $a(t) = 0,44 \cdot e^{b \cdot t}$



Bestimmen Sie die Raumtemperatur im Heizungskeller.

(3 Punkte)

Lösungen

- 2.1.1 Die kleine Teekanne (Funktion f) gehört zu Schaubild B.
Die große Teekanne (Funktion g) gehört zu Schaubild A.

Begründung: Da die Hochzahlen bei der Funktion f mit $-0,06$ kleiner ist als die Hochzahl bei der Funktion g mit $-0,04$ nähert sich das Schaubild von f schneller der t -Achse an als das Schaubild von g .

Raumtemperatur in der Küche:

Die Temperatur des Tees nähert sich für $t \rightarrow +\infty$ der Raumtemperatur an.

Für beide Funktionen gilt: Für $t \rightarrow +\infty$ gilt $f(t) \rightarrow 20$ und $g(t) \rightarrow 20$.

Die Raumtemperatur in der Küche beträgt 20°C .

$$\text{Es gilt } f(20) = 20 + 80 \cdot e^{-0,06 \cdot 20} = 44,096 \approx 44^\circ\text{C}$$

- 2.1.2 Die Differenz der Wassertemperaturen lässt sich durch die Funktion

$$d(t) = g(t) - f(t) = 20 + 80e^{-0,04t} - (20 + 80e^{-0,06t}) = 80e^{-0,04t} - 80e^{-0,06t}$$

ausdrücken.

Gesucht ist das globale Maximum von $d(t)$.

Notwendige Bedingung: $d'(t) = 0$ und $d''(t) < 0$

$$\text{Es gilt } d'(t) = -3,2e^{-0,04t} + 4,8e^{-0,06t}$$

$$-3,2e^{-0,04t} + 4,8e^{-0,06t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,04t} \cdot (-3,2 + 4,8e^{-0,02t}) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^{-0,04t} = 0$ ist nicht lösbar

$$\text{Gleichung II): } -3,2 + 4,8e^{-0,02t} = 0 \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(\frac{2}{3})}{-0,02} = 20,27$$

Anhand der Skizze in der Aufgabe 2.1.1 erkennt man, dass die ermittelte Stelle auch die Stelle des globalen Maximums von d ist.

Damit unterscheiden sich die Wassertemperaturen der beiden Teekannen nach rund 20 Minuten am stärksten.

2.2 $a(t) = 0,44 \cdot e^{b \cdot t}$

Der Wert von b kann anhand des Schaubildes berechnet werden.
Der Punkt $A(40|0,2)$ liegt auf dem Schaubild von $a(t)$.

$$0,2 = 0,44 \cdot e^{b \cdot 40}$$

$$\Leftrightarrow e^{40b} = \frac{5}{11} \Leftrightarrow b = \frac{\ln(\frac{5}{11})}{40} \approx -0,0197$$

Die Stammfunktion $A(t)$ von $a(t)$ mit $A(0) = 10$ stellt die Temperatur des Wassers zum Zeitpunkt t dar.

$$A(t) = 0,44 \cdot e^{-0,0197t} \cdot \frac{1}{-0,0197} + C$$

$$A(t) = -22,335 \cdot e^{-0,0197t} + C$$

Bedingung: $A(0) = 10$

$$10 = -22,335 \cdot e^0 + C \Leftrightarrow C = 32,335$$

Die Wassertemperaturfunktion lautet $A(t) = -22,335 \cdot e^{-0,0197t} + 32,335$

Die Temperatur im Heizungskeller entspricht der Höhe der waagrechten Asymptote der Funktion $A(t)$.

Die waagrechte Asymptote lautet $y = 32,335$.

Somit beträgt die Temperatur im Heizungskeller $32,335^\circ\text{C}$.