

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

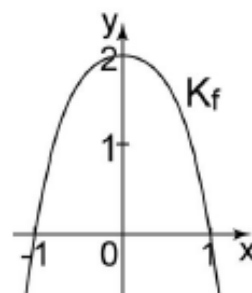
Analysis

1.1

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -x^4 - x^2 + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f von f .

Es gilt: $f(1) = 0$.

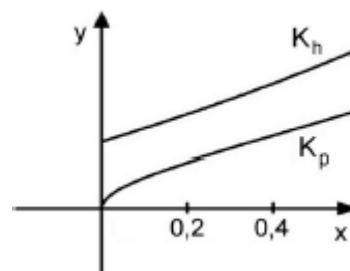


- 1.1.1 Begründen Sie, dass K_f symmetrisch zur y -Achse ist.
Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks, dessen Eckpunkte die Schnittpunkte von K_f mit den Koordinatenachsen sind. (4 Punkte)
- 1.1.2 Zeigen Sie, dass K_f keinen Wendepunkt besitzt. (2 Punkte)
- 1.1.3 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K_f und den Koordinatenachsen im 1. Quadranten umschlossen wird.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die durch den Hochpunkt von K_f verläuft und diese Fläche halbiert. (4 Punkte)
- 1.2 Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = e^x + x$ mit $x \in \mathbb{R}$.
 K_h ist das Schaubild von h .
- 1.2.1 Die Funktion h besitzt eine Nullstelle x_0 im Intervall $[-1; 0]$.
Bestimmen Sie die ersten beiden Nachkommastellen von x_0 . (2 Punkte)
- 1.2.2 Ermitteln Sie, um wie viele Längeneinheiten man die Gerade mit $y = 2x$ nach oben verschieben muss, damit die verschobene Gerade K_h berührt. (3 Punkte)
- 1.2.3

Die Abbildung zeigt jeweils einen Ausschnitt des Schaubilds K_h , sowie des Schaubilds K_p einer für $x \geq 0$ definierten Funktion p .

Betrachtet wird der Term

$$T = \pi \cdot \int_{0,2}^{0,4} (h(x))^2 dx - \pi \cdot \int_{0,2}^{0,4} (p(x))^2 dx.$$



1.2.3.1

Erläutern Sie die Bedeutung des Wertes von T im dreidimensionalen geometrischen Zusammenhang. (2 Punkte)

1.2.3.2

Es gilt: $T = \pi \cdot \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{3} x^3 \right]_{0,2}^{0,4}$.

Ermitteln Sie einen Funktionsterm für p . (3 Punkte)

Lösungen

- 1.1.1 K_f ist symmetrisch zur y-Achse, da f eine Polynomfunktion ist, bei dem keine Potenzen mit ungeraden Exponenten auftreten.

Anhand der Abbildung können die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen abgelesen werden: $N_1(-1|0)$, $N_2(1|0)$, $S_y(0|2)$

Umfang des Dreiecks:

$$\text{Es gilt } \overline{S_y N_1} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

(schräge Strecke im Koordinatensystem mit dem Satz des Pythagoras)

$$U = \overline{N_1 N_2} + 2 \cdot \overline{S_y N_1} = 2 + 2 \cdot \sqrt{5}$$

- 1.1.2 Notwendige Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$\text{Es gilt } f'(x) = -4x^3 - 2x \text{ und } f''(x) = -12x^2 - 2$$

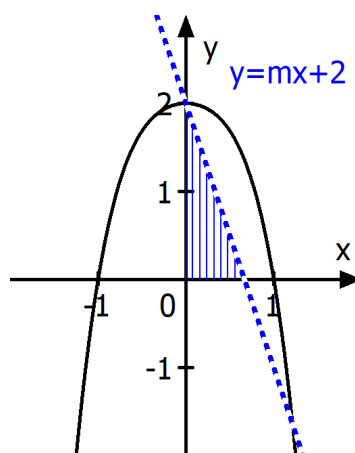
$$-12x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{6}$$

Die Gleichung ist nicht lösbar, daher existiert kein Wendepunkt.

- 1.1.3 Gesuchter Flächeninhalt:

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{22}{15} \text{ FE}$$

Ansatz für die gesuchte Gerade durch den Hochpunkt $H(0|2)$: $y = mx + 2$



Das markierte Dreieck soll den Flächeninhalt $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{15} = \frac{11}{15}$

Flächeninhaltsformel des Dreiecks: $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot u \cdot 2 = u$

Somit muss $u = \frac{11}{15}$ gelten.

u ist hierbei die Nullstelle der gesuchten Gerade.

Einsetzen des Punktes $N(\frac{11}{15} | 0)$ in die Geradengleichung:

$$0 = m \cdot \frac{11}{15} + 2 \Leftrightarrow m = -\frac{30}{11}$$

Gleichung der gesuchten Gerade: $y = -\frac{30}{11}x + 2$

1.2.1 Nullstellenberechnung: $h(x) = 0$

$$\begin{aligned} h(-0,5) &= 0,107 & h(-0,6) &= -0,051 \\ h(-0,55) &= 0,027 & h(-0,56) &= 0,011 & h(-0,57) &= -0,004 \\ h(-0,569) &= -0,0029 \end{aligned}$$

Damit ist $x_0 = -0,56\dots$

1.2.2 Die Gerade hat die Gleichung $g(x) = 2x + c$

Bedingung für die Berührung:

$$h(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x + x = 2x + c \quad (*)$$

$$h'(x) = g'(x) \Leftrightarrow e^x + 1 = 2 \quad (**)$$

Aus $(**)$ folgt $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$

Einsetzen von $x = 0$ in $(*)$: $e^0 + 0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$

Die gesuchte Gerade hat die Gleichung $g(x) = 2x + 1$.

Damit muss die Gerade $y = 2x$ um eine Längeneinheit nach oben verschoben werden.

1.2.3.1

Die Schaubilder K_h und K_p sowie die Geraden $x = 0,2$ und $x = 0,4$ schließen eine Fläche ein, die um die x -Achse rotiert. Der Wert des Terms T gibt das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers an.

1.2.3.2

$$T = \pi \cdot \int_{0,2}^{0,4} (h(x))^2 dx - \pi \cdot \int_{0,2}^{0,4} (p(x))^2 dx = \pi \cdot \int_{0,2}^{0,4} (h(x)^2 - p(x)^2) dx$$

Wegen $T = \pi \cdot \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{3} x^3 \right]_{0,2}^{0,4}$ gilt:

$$\left(\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{3} x^3 \right)' = h(x)^2 - p(x)^2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} + x^2 = (e^x + x)^2 - p(x)^2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} + x^2 = e^{2x} + 2x \cdot e^x + x^2 - p(x)^2$$

$$\text{Daraus folgt } (p(x))^2 = 2x \cdot e^x \Rightarrow p(x) = \pm \sqrt{2x \cdot e^x} = \pm \sqrt{2x} \cdot e^{0,5x}$$

Da das Schaubild von p in der Abbildung oberhalb der x -Achse liegt, folgt daraus $p(x) = \sqrt{2x \cdot e^x} = \sqrt{2x} \cdot e^{0,5x}$.