

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023

Baden-Württemberg

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie, Matrizenrechnung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Analysis

- 1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f .

Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von K_f .

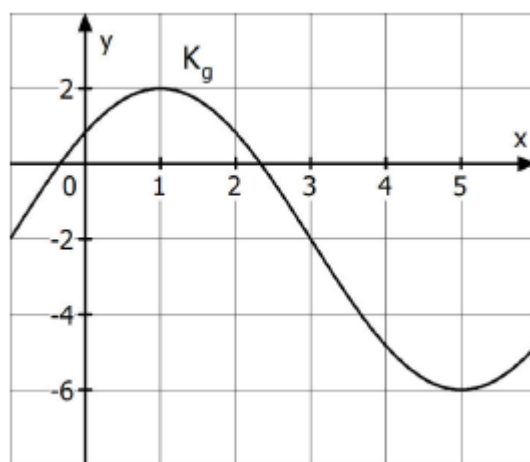
Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts von K_f an. (5 Punkte)

- 1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_g einer Funktion g .

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. (5 Punkte)

- (1) $g(5) - g(3) < -5$
- (2) $g'(4) < 0$
- (3) Für jede Stammfunktion G von g gilt: $G(3) - G(0) > 0$.



- 1.3 Eine in $\mathbb{R}$ definierte Cosinusfunktion h hat die Periodenlänge p .

Der Punkt $\left(\frac{p}{2} \mid p\right)$ ist ein Hochpunkt des Graphen von h , der Punkt $\left(\frac{p}{4} \mid \frac{p}{2}\right)$ ein Wendepunkt.

Bestimmen Sie die Steigung von h an der Stelle $\frac{p}{4}$. (5 Punkte)

Stochastik

- 2 Eine Urne enthält eine goldene Kugel sowie vier schwarze und fünf weiße Kugeln.

Aus dieser Urne wird zufällig jeweils eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

- 2.1 Es wird dreimal gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

Es wird zunächst die goldene, dann eine schwarze und zuletzt eine weiße Kugel gezogen. (2 Punkte)

- 2.2 Aus der Urne wird nun mehrmals gezogen.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die goldene Kugel dabei gezogen wird.

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der gerundeten Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3	4	5	6	...
$P(X = k)$	0,04	0,14	0,23	0,24	0,18	0,10	0,05	...

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Tabelle jeweils die Wahrscheinlichkeit für die folgende Ereignisse:

B: Die goldene Kugel wird höchstens dreimal gezogen.

C: Die goldene Kugel wird mindestens einmal gezogen.

(3 Punkte)

- 2.3 Im Folgenden wird nur die Anzahl der goldenen Kugeln in der Urne verändert.

Formulieren Sie eine Frage im gegebenen Sachzusammenhang, die durch

das Lösen der Gleichung $\frac{1+x}{10+x} = 0,4$ beantwortet werden kann.

Berechnen Sie x.

(3 Punkte)

Stochastik

- 2 Ein idealer Würfel hat vier weiße Flächen und zwei schwarze Flächen. Bei einem Spiel wirft man den Würfel solange, bis eine schwarze Fläche gewürfelt wird, jedoch höchstens viermal.

2.1 Geben Sie die Ergebnismenge an. (2 Punkte)

2.2 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse in einem Spiel:

A: Das Spiel endet spätestens nach dem zweiten Wurf.

B: Es wird viermal gewürfelt und eine schwarze Fläche erscheint.

C: Es wird mindestens zweimal gewürfelt.

(6 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 3 Gegeben sind die Punkte $A(1|0|2)$, $B(2|-1|0)$ und $C(-2|3|8)$.
Die Gerade g enthält die Punkte B und C .

- 3.1 Zeigen Sie, dass A auf g liegt.
Begründen Sie, dass A dreimal so weit von C entfernt ist wie von B .
(4 Punkte)

- 3.2 Gegeben ist die Gerade h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

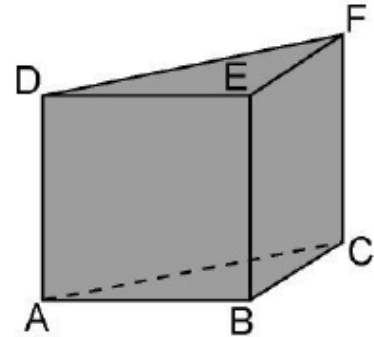
- 3.2.1 Zeigen Sie, dass die Gerade h parallel zu g , aber nicht identisch mit g ist.
(2 Punkte)

- 3.2.2 Geben Sie eine Gleichung einer Ebene an, die orthogonal zu h ist.
(1 Punkt)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3

Gegeben sind die Eckpunkte $A(2|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|2|0)$, $D(2|0|2)$ eines Prismas mit der Grundfläche ABC und den zu dieser Fläche senkrechten Kanten AD , BE und CF .



- 3.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Berechnen Sie das Volumen des Prismas.

(2 Punkte)

- 3.2 Die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

enthält einen Eckpunkt und den Mittelpunkt einer Kante des Prismas. Bestimmen Sie diese beiden Punkte.

(2 Punkte)

- 3.3 Die Gerade h ist gegeben durch

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

Untersuchen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden.

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Bestimmen Sie die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. (3 Punkte)

3.2 Es gilt: $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie: $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

(2 Punkte)

3.3 C ist eine invertierbare Matrix und E die Einheitsmatrix gleichen Formats.
Lösen Sie die Matrixgleichung $C \cdot (X - E) + X = X - 2C$ nach X auf.

(2 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3 Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$. Damit ist $\vec{b}^T = (-4 \quad -1 \quad -10)$.

3.1 Geben Sie jeweils die Zeilen- und Spaltenanzahl von A^2 und $\vec{b}^T \cdot A \cdot \vec{b}$ an.

(2 Punkte)

3.2 Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist.

(1 Punkt)

3.4 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass A keine Inverse hat.

(4 Punkte)

Lösungen**Analysis**

1.1 Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6 \text{ und } f''(x) = 3x \text{ und } f'''(x) = 3$$

$$\frac{3}{2}x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$f''(2) = 6 > 0, \text{ also relatives Minimum}$$

Wegen $f(2) = -8$ lautet der Tiefpunkt $T(2|-8)$.

$$f''(-2) = -6 < 0, \text{ also relatives Maximum}$$

Wegen $f(-2) = 8$ lautet der Hochpunkt $H(-2|8)$.

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'''(0) = 3 \neq 0$$

Wegen $f(0) = 0$ lautet der Wendepunkt $W(0|0)$.

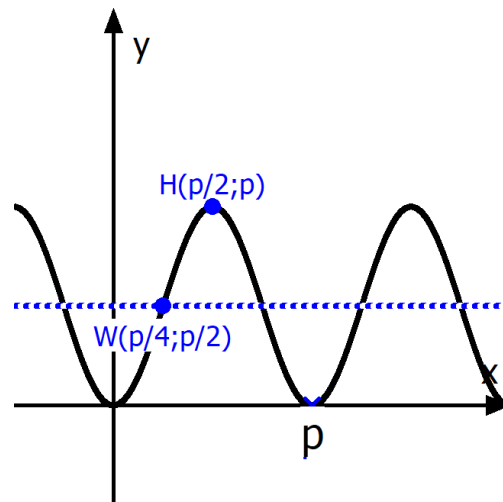
1.2 (1) Es gilt $g(5) - g(3) = -6 - (-2) = -4$
Die Aussage ist falsch.

(2) $g'(4) < 0$ ist eine wahre Aussage, da die Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 4$ eine negative Steigung besitzt.

$$(3) \text{ Es gilt } G(3) - G(0) = \int_0^3 g(x) dx$$

Die x -Achse, das Schaubild von g und die Geraden $x = 0$ und $x = 3$ schließen zwei Flächenstücke ein. Der Inhalt der Fläche oberhalb der x -Achse ist größer als der Inhalt der Fläche unterhalb der x -Achse. Daher ist das Integral positiv und die Aussage ist wahr.

1.3 Skizze der Cosinusfunktion:



Es handelt sich um eine Minus-Kosinusfunktion, da der Tiefpunkt des Schaubildes auf der y-Achse liegt.

Die Amplitude ist $\frac{p}{2}$ und das Schaubild ist um $\frac{p}{2}$ nach oben verschoben.

Funktionsgleichung: $h(x) = -\frac{p}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{p} \cdot x\right) + \frac{p}{2}$

Es gilt $h'(x) = \frac{p}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot x\right) \cdot \frac{2\pi}{p} = \pi \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot x\right)$

Daraus folgt $h'\left(\frac{p}{4}\right) = \pi \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot \frac{p}{4}\right) = \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

Stochastik

$$2.1 \quad P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{20}{1000} = \frac{1}{50}$$

$$2.2 \quad P(B) = P(X \leq 3) = 0,04 + 0,14 + 0,23 + 0,24 = 0,65$$
$$P(C) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,04 = 0,96$$

$$2.2 \quad \frac{1+x}{10+x} = 0,4$$

Aus dem Nenner $10 + x$ ergibt sich, dass zu den 10 Kugeln x Kugeln dazugegeben werden.

Aus dem Zähler $1 + x$ ergibt sich, dass zu der 1 goldenen Kugel x goldene Kugeln dazugegeben werden.

Frage: Wie viele goldene Kugeln müssen der Urne mit den 10 Kugeln hinzugefügt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Ziehen eine goldene Kugel zu ziehen, 40% beträgt?

Berechnung von x :

$$\frac{1+x}{10+x} = 0,4 \quad | \cdot (10+x)$$

$$\Leftrightarrow 1+x = 0,4 \cdot (10+x)$$

$$\Leftrightarrow 1+x = 4 + 0,4x$$

$$\Leftrightarrow 0,6x = 3 \Leftrightarrow x = 5$$

Stochastik

- 2.1 s: schwarz wird gewürfelt
w: weiß wird gewürfelt

Ergebnismenge: { s; ws ; wws ; wwws ; wwww }

- 2.2 A: Das Spiel endet spätestens nach dem zweiten Wurf.

B: Es wird viermal gewürfelt und eine schwarze Fläche erscheint.

C: Es wird mindestens zweimal gewürfelt.

$$P(A) = P(s) + P(ws) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

$$P(B) = P(wwws) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

$$P(C) = 1 - P(s) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Punktprobe mit A(1|0|2): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Die Gleichung wird erfüllt für $t = \frac{1}{4}$, somit liegt A auf g.

Es gilt $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Wegen $\overrightarrow{AC} = -3 \cdot \overrightarrow{AB}$ ist Punkt A dreimal so weit von C entfernt wie von B.

3.2.1 Der Richtungsvektor von h ist ein Vielfaches vom Richtungsvektor von g.

Damit sind die Geraden parallel.

Kontrolle, ob der Punkt B(2|-1|0) auf h liegt: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aus der 3. Zeile folgt: $t = 0$

Aus der 2. Zeile folgt: $t = 0$

Aus der 1. Zeile folgt: $t = 1$

Damit liegt B nicht auf der Geraden h und damit sind die Geraden g und h nicht identisch.

3.2.2 Damit die Ebene orthogonal zu h ist, muss der Normalenvektor der Ebene ein Vielfaches von dem Richtungsvektor von h sein.

Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich als mögliche Koordinatengleichung

$E: -x_1 + x_2 + 2x_3 = d$ (d kann eine beliebige Zahl sein)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Laut der Abbildung könnte der rechte Winkel im Punkt B sein.

$$\text{Rechnerischer Nachweis: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Da das Skalarprodukt gleich Null ergibt, ist die Rechtwinkligkeit nachgewiesen.

Volumen des Prismas: $V = G \cdot h$

$$\text{Grundfläche des Prismas: } G = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$\text{Höhe des Prismas: } h = |\overrightarrow{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 2$$

$$\text{Volumen: } V = 2 \cdot 2 = 4$$

3.2 Der Geradenpunkt $(1|2|0)$ ist der Mittelpunkt der Kante BC.

Setzt man in die Gerade für $s = 1$ ein, ergibt sich der Punkt $D(2|0|2)$.

Damit verläuft die Gerade g durch den Punkt D und den Mittelpunkt der Kante BC.

3.3 Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind keine Vielfachen zueinander, also sind die Geraden nicht parallel.

Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} 1+s &= 2-2r \\ 2-2s &= 1+r \\ 2s &= 2r \end{aligned}$$

Aus der 3. Zeile folgt $s = r$ (*)

$$\text{Einsetzen von (*) in die 2. Zeile: } 2-2s = 1+s \Leftrightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$\text{Aus (*) ergibt sich } r = \frac{1}{3}$$

$$\text{Kontrolle mit der 1. Zeile: } 1+\frac{1}{3} = 2-\frac{2}{3} \text{ ist eine wahre Aussage}$$

Damit schneiden sich die Geraden g und h .

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Bestimmen Sie die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. (3 Punkte)

$$\begin{array}{l} (1) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1)^* = (1) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \\ (2) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2)^* = 5 \cdot (1) - 2 \cdot (2) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1)^* + (2)^* \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \\ (2)^* \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

Division der ersten Zeile durch 2 ergibt: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right)$

Daraus folgt $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

3.2 Allgemein gilt: $B \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = B \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{y}$

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = B \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 3.3 \quad C \cdot (X - E) + X = X - 2C \\ \Leftrightarrow CX - CE + X = X - 2C \\ \Leftrightarrow CX - C = -2C \\ \Leftrightarrow CX = -C \quad | \cdot C^{-1} \text{ von links} \\ \\ \Leftrightarrow X = -C^{-1} \cdot C = -E \end{array}$$

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3 Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$. Damit ist $\vec{b}^T = (-4 \quad -1 \quad -10)$.

3.1 Geben Sie jeweils die Zeilen- und Spaltenanzahl von A^2 und $\vec{b}^T \cdot A \cdot \vec{b}$ an.

Die Matrix A^2 hat das Format (3;3), also 3 Zeilen und 3 Spalten.

Die Matrix $\vec{b}^T \cdot A \cdot \vec{b}$ hat das Format (1;1), also 1 Zeile und 1 Spalte.
Begründung: $(1;3) * (3;3) * (3;1) = (1;3) * (3;1) = (1;1)$

3.2 Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist.

$$\text{Es gilt } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1-5 \\ 3+1-5 \\ 0-5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} = \vec{b} \text{ was zu zeigen war.}$$

$$3.3 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 2x_1 - x_2 - 5x_3 = -4$$

$$(2) \quad 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1$$

$$(3) \quad -5x_2 - 5x_3 = -10$$

$$\begin{array}{ll} (1)^* = (1) & 2x_1 - x_2 - 5x_3 = -4 \\ (2)^* = 3 \cdot (1) - 2 \cdot (2) & -5x_2 - 5x_3 = -10 \\ (3)^* = (3) & -5x_2 - 5x_3 = -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} (1)^* & 2x_1 & -x_2 & -5x_3 & = & -4 \\ (2)^* & & -5x_2 & -5x_3 & = & -10 \\ (2)^* - (3)^* & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aus $(2)^*$ folgt: $-5x_2 - 5t = -10 \Leftrightarrow x_2 = 2 - t$

Aus $(1)^*$ folgt: $2x_1 - (2 - t) - 5t = -4 \Leftrightarrow 2x_1 = 4t - 2 \Leftrightarrow x_1 = 2t - 1$

Lösungsmenge: $L = \{(2t - 1 \mid 2 - t \mid t); t \in \mathbb{R}\}$

Die Matrix A hat keine Inverse, da das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ keine eindeutige Lösung besitzt.