

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2023

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 4 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -3x^2 + 12x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild K_f ist unten abgebildet.

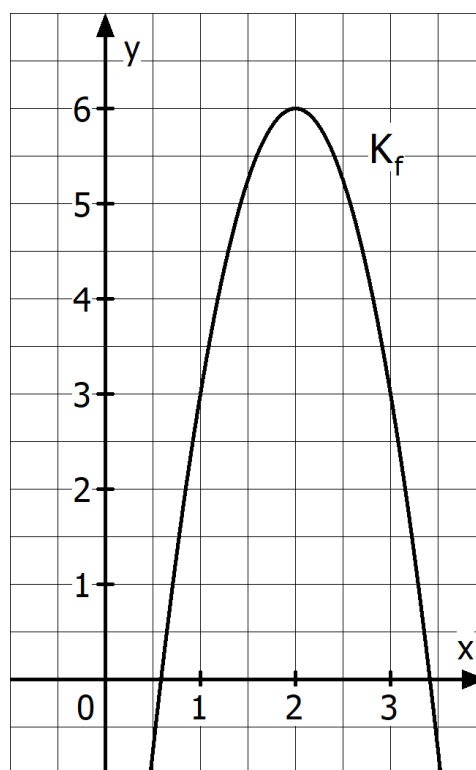
4.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f . (3 Punkte)

4.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes von K_f und der Geraden mit der Gleichung $y = 3x + 0,75$. (4 Punkte)

4.3 Die Punkte $O(0|0)$, $P(u|0)$ und $Q(u|f(u))$ bilden für $1 \leq u \leq 3$ das Dreieck OPQ .

Zeichnen Sie das Dreieck für $u = 2$ in das nebenstehende Schaubild ein.

Berechnen Sie, für welchen Wert von u der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.



(9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = ax^3 + bx^2$, $x \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$.

Ihr Schaubild ist K_h .

4.4 K_h hat im Punkt $H(2|6)$ einen Hochpunkt.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von h .

(5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x) + 3$, $x \in [0;6]$. Ihr Schaubild ist K_g .

4.5 Zeichnen Sie K_g .

Das Schaubild K_g soll so in y -Richtung gestreckt werden, dass die Hochpunkte den y -Wert 7,5 haben. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für die gestreckte Kurve an. (5 Punkte)

4.6 K_f und K_g schneiden sich an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$.

Berechnen Sie den Inhalt der zwischen K_f und K_g eingeschlossenen Fläche.

(4 Punkte)

Lösung

4.1 $f(x) = -3x^2 + 12x - 6$

Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$-3x^2 + 12x - 6 = 0 \quad | :(-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} \approx 3,41 \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} \approx 0,59$$

4.2 $f(x) = -3x^2 + 12x - 6$ und $k(x) = 3x + 0,75$

Daraus folgt $f'(x) = -6x + 12$ und $k'(x) = 3$

Bedingungen für Berührung: (I) $f(x) = k(x)$ und (II) $f'(x) = k'(x)$

$$(I) \quad -3x^2 + 12x - 6 = 3x + 0,75$$

$$(II) \quad -6x + 12 = 3$$

Aus (II) folgt $x = 1,5$.

Einsetzen von $x = 1,5$ in (I) ergibt eine wahre Aussage: $5,25 = 5,25$

Somit berühren sich die Schaubilder im Punkt $B(1,5|5,25)$.

4.3 Zeichnung für $u = 2$:

Die Eckpunkte haben die Koordinaten $O(0|0)$, $P(2|0)$ und $Q(2|f(2))$ mit $f(2) = 6$.

Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OP} \cdot \overline{PQ}$$

Anhand der Koordinaten der Eckpunkte ergibt sich:

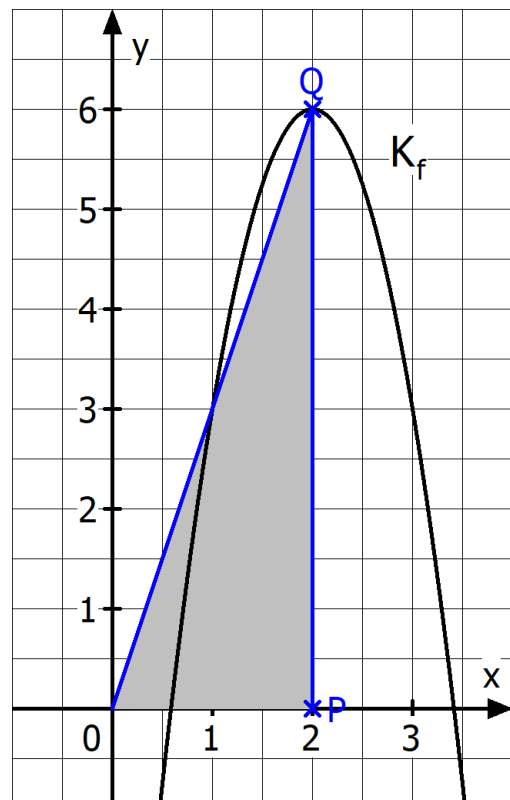
$$\overline{OP} = u - 0 = u$$

$$\overline{PQ} = f(u) - 0 = f(u)$$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = \frac{1}{2}u \cdot f(u)$.

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{1}{2}u \cdot (-3u^2 + 12u - 6) \\ &= -1,5u^3 + 6u^2 - 3u \quad \text{mit } 1 \leq u \leq 3 \end{aligned}$$

Bedingung für lokales Maximum von $A(u)$: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$



$$A'(u) = -4,5u^2 + 12u - 3$$

$$A''(u) = -9u + 12$$

$$-4,5u^2 + 12u - 3 = 0$$

$$\text{Lösung mit der abc-Formel: } u_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot (-4,5) \cdot (-3)}}{-9}$$

$$u_1 \approx 0,28 \text{ und } u_2 \approx 2,39$$

$$A''(0,28) > 0 \text{ also lokales Minimum}$$

$$A''(2,39) < 0 \text{ also lokales Maximum}$$

$$\text{Es gilt } A(2,39) \approx 6,62.$$

Nun muss noch mit Hilfe einer Randwertuntersuchung geprüft werden, ob das lokale Maximum auch ein globales Maximum ist.

$$\text{Randwert } u = 1: A(1) = 1,5$$

$$\text{Randwert } u = 3: A(3) = 4,5$$

Damit existiert für $u = 2,39$ ein globales Maximum mit $A(2,39) = 6,62$ FE.

4.4 $h(x) = ax^3 + bx^2$

Bedingungen:

$$\text{Punkt } H(2|6) \text{ liegt auf dem Schaubild: } h(2) = 6 \quad (\text{I})$$

$$\text{An der Stelle } x = 2 \text{ ist ein Hochpunkt: } h'(2) = 0 \quad (\text{II})$$

$$\text{Es gilt } h'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$\text{Gleichung zu (I): } 8a + 4b = 6$$

$$\text{Gleichung zu (II): } 12a + 4b = 0$$

$$\text{Aus (II) folgt } b = -3a$$

$$\text{Einsetzen in (I): } 8a + 4 \cdot (-3a) = 6 \Leftrightarrow a = -1,5$$

$$\text{Daraus folgt } b = -3 \cdot (-1,5) = 4,5.$$

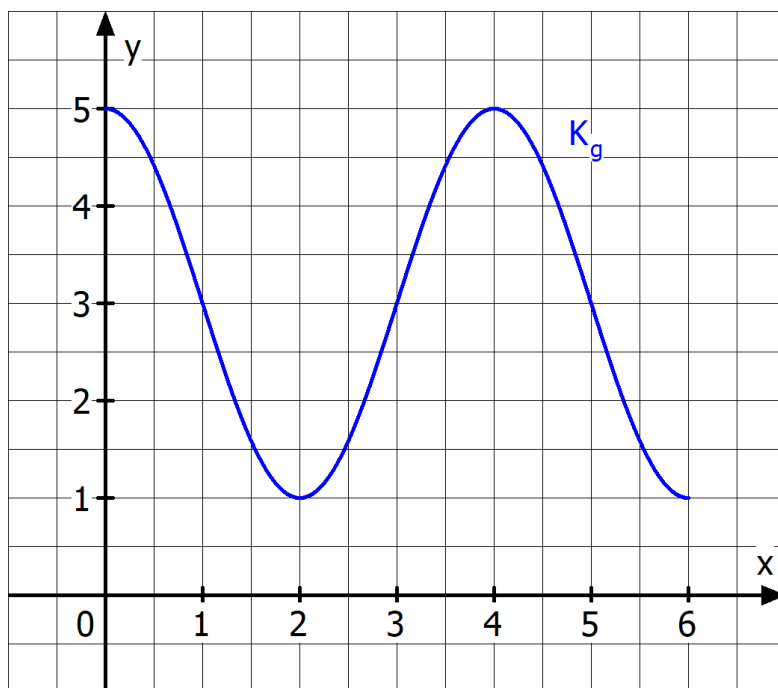
$$\text{Damit gilt } h(x) = -1,5x^3 + 4,5x^2.$$

4.5 Zeichnung von $g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$:

Das Schaubild der Funktion hat eine waagrechte Mittellinie auf der Höhe $y = 3$.

$$\text{Die Amplitude beträgt 2 und die Periode ist } p = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$$

Da es sich um eine Kosinusfunktion handelt, startet das Schaubild von g auf der y -Achse in einem Hochpunkt.



Der y-Wert der Hochpunkte beträgt $y = 5$.

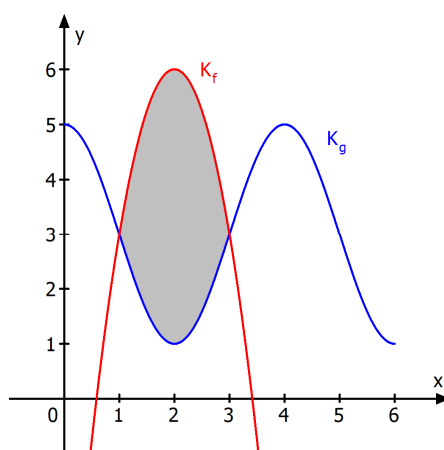
Berechnung des Streckfaktors, damit der y-Wert 7,5 beträgt:

$$\text{Streckfaktor } a = \frac{7,5}{5} = 1,5$$

Funktionsterm für gestreckte Kurve:

$$g^*(x) = 1,5 \cdot g(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 4,5$$

4.6 Skizze zur Flächenberechnung:



$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 6 - (2 \cos(\frac{\pi}{2}x) + 3)) dx \\ &= \left[-x^3 + 6x^2 - 6x - 2 \cdot \frac{1}{\pi/2} \sin(\frac{\pi}{2}x) - 3x \right]_1^3 = 0 + \frac{4}{\pi} - (-4 + \frac{4}{\pi}) = 4 + \frac{8}{\pi} \end{aligned}$$