Hauptprüfung Fachhochschulreife 2023

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Ein Gasthaus in Grönland hat sowohl einen beheizten Innenbereich als auch einen unbeheizten Außenbereich und serviert in beiden Bereichen heißen Kaffee.
Zur Beschreibung der Temperatur (in °C) einer servierten Tasse Kaffee in den jeweiligen Bereichen werden modellhaft die Funktionen T_1 und T_2 mit

$T_1(t) = -12 + ae^{-0,1t}$ und $T_2(t) = 23 + 67e^{-0,1t}$

betrachtet.
Dabei ist jeweils $t \in [0;20]$ die Zeit (in Minuten) und a hat den Wert 102.

3.1 Begründen Sie, dass a den angegebenen Wert haben muss, damit beide Funktionen auch die Temperatur eines frisch servierten Kaffees beschreiben.

(2 Punkte)

3.2 Zeichnen Sie die Schaubilder der beiden Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(5 Punkte)

3.3 Begründen Sie, welche der beiden Funktionen den Temperaturverlauf im Innenraum und welche den im Außenbereich beschreibt.

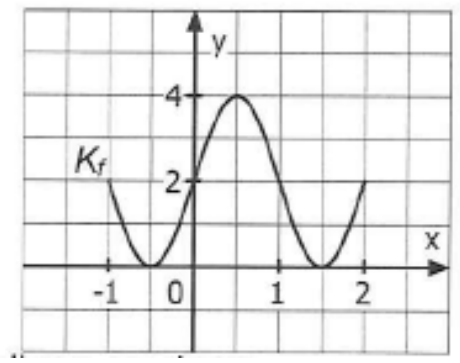
(2 Punkte)

3.4 Angenommen wird eine Trinktemperatur von 40°C.
Berechnen Sie den Unterschied zwischen den Zeiten, zu denen die Trinktemperatur in den beiden Modellen jeweils erreicht wird.

(5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(\pi x) + 2$, $x \in [-1;2]$ und ihr Schaubild K_f.

3.5 Geben Sie die Nullstellen von f an.
K_f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.



(6 Punkte)

3.6 Betrachtet wird die Gleichung $2\sin(\pi x) + 2 = 1$.
Formulieren Sie zum Schaubild K_f eine Aufgabenstellung, zu deren Beantwortung diese Gleichung gelöst werden müsste.
Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichung. (6 Punkte)

3.7 Skizzieren Sie das Schaubild einer trigonometrischen Funktion, das punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und eine Periodenlänge von 6 hat.
Geben Sie einen Funktionsterm zu Ihrem Schaubild an. (4 Punkte)

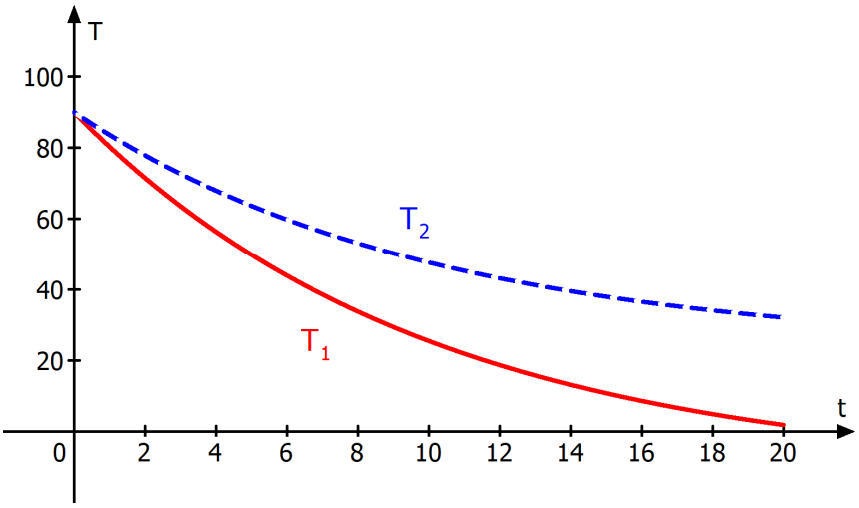
Lösung

3.1 Der Zeitpunkt des frisch servierten Kaffees ist t = 0.

Es gilt $T_2(0) = 23 + 67 \cdot e^0 = 90\ °C$

Bedingung: $T_1(0) = 90 \Leftrightarrow -12 + a \cdot e^0 = 90 \Leftrightarrow a = 102$

3.2 Zeichnung der Schaubilder mit Hilfe einer Wertetabelle des WTR:



3.3 Das Schaubild der Funktion T_1 besitzt die waagrechte Asymptote y = -12.
Das heißt die Kaffeetemperatur nähert sich langfristig dem Wert -12°C.

Das Schaubild der Funktion T_2 besitzt die waagrechte Asymptote y = 23.
Das heißt die Kaffeetemperatur nähert sich langfristig dem Wert 23°C.

Daher beschreibt T_1 den Abkühlungsvorgang im Außenbereich und T_2 im Innenbereich.

3.4 Bedingung: $T_1(t) = 40 \Leftrightarrow -12 + 102e^{-0,1t} = 40 \Leftrightarrow e^{-01,t} = 0,5098$

$\Rightarrow t \approx -10\ln(0,5098) = 6,73$ Minuten

$T_2(t) = 40 \Leftrightarrow 23 + 67e^{-0,1t} = 40 \Leftrightarrow e^{-01,t} = 0,2537$

$\Rightarrow t \approx -10\ln(0,2537) = 13,72$ Minuten

Der Zeitunterschied beträgt 13,72 – 6,73 = 6,99 und damit ca. 7 Minuten.

3.5 Die beiden Nullstellen können aus dem Schaubild abgelesen werden:
x = -0,5 und x = 1,5.

Inhalt der Fläche:

$$A = \int_{-0,5}^{1,5} (2\sin(\pi x) + 2)dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos(\pi x) + 2x \right]_{-0,5}^{1,5}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos(1,5\pi) + 3 - (-\frac{2}{\pi}\cos(-0,5\pi) - 1) = 4 \text{ FE}$$

3.6 Formulierung einer Aufgabenstellung:

Beispiel 1:
„Bestimmen Sie die Stellen, an denen das Schaubild von f die Gerade y = 1 schneidet."

Beispiel 2:
„Bestimme die x-Koordinaten der Punkte auf dem Schaubild von f, die den y-Wert 1 besitzen."

Lösung der Gleichung:
$2\sin(\pi x) + 2 = 1 \Leftrightarrow \sin(\pi x) = -0,5$ Substitution: $u = \pi x$

$$\sin(u) = -0,5 \Rightarrow u_1 = \sin^{-1}(-0,5) = -\frac{\pi}{6}$$

Rücksubstitution: $\pi x = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{6}$

Die Periode der Funktion $y = \sin(\pi x)$ ist p = 2.

$$x_2 = x_1 + p = -\frac{1}{6} + 2 = \frac{11}{6} \qquad x_3 = \frac{p}{2} - x_1 = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$x_4 = x_3 - p = \frac{7}{6} - 2 = -\frac{5}{6}$$

3.7 Die Sinusfunktion y = sin(bx) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
Es gilt $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Eine mögliche Funktion lautet $g(x) = \sin(\frac{\pi}{3}x)$.

Skizze:

