Hauptprüfung Fachhochschulreife 2023

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K_f.

2.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ Nullstellen von f sind.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f für $-2 \le x \le 2{,}5$.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f.

(12 Punkte)

2.2 Das Schaubild K_f und die x-Achse schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (4 Punkte)

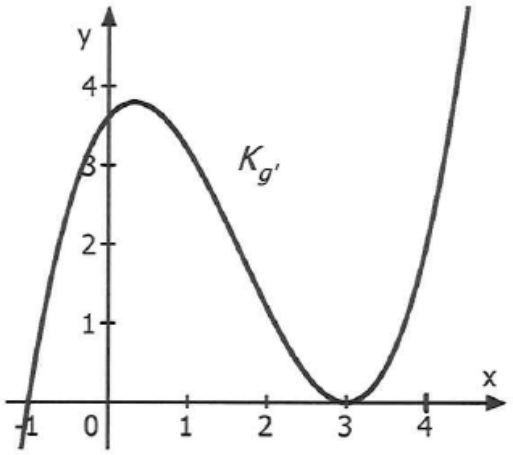
Die Abbildung zeigt das Schaubild $K_{g'}$ der ersten Ableitungsfunktion g' einer Funktion g.

2.3 Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) An der Stelle x = 3 besitzt das Schaubild von g einen Tiefpunkt.

b) Das Schaubild von g hat zwei Wendepunkte.

c) Für $1 \le x \le 2$ verläuft das Schaubild von g in einer Rechtskurve.



(6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 3e^{-0{,}5x} + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h.

2.4 Skizzieren Sie K_h.
Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_h an der Stelle x = 0.

(5 Punkte)

2.5 Ermitteln Sie die Stelle, an der die momentane Änderungsrate von h den Wert -1 hat.

(3 Punkte)

Lösung

2.1 $f(x) = -x^3 + 3x + 2$

Nachweis der Nullstellen:
Einsetzen der Werte $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ in die Funktion f:

$f(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

$f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2 + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$

Damit sind die Nullstellen nachgewiesen.

Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Es gilt $f'(x) = -3x^2 + 3$ und $f''(x) = -6x$.

$-3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

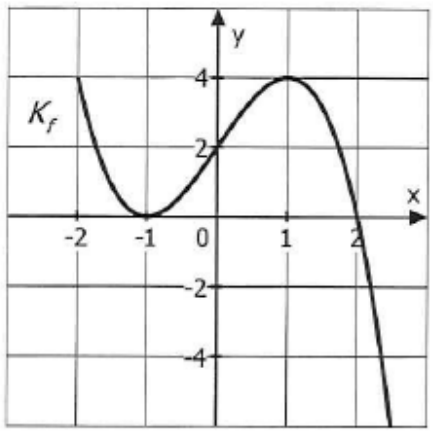
$f''(1) = -6 < 0$ somit existiert ein lokales Maximum

Mit f(1) = 4 ergibt sich als Hochpunkt H(1|4).

$f''(-1) = 6 > 0$ somit existiert ein lokales Minimum

Mit f(-1) = 0 ergibt sich als Tiefpunkt T(-1|0).

Zeichnung des Schaubildes von f:
(hier kann noch zusätzlich eine Wertetabelle mit Hilfe des WTR erstellt werden)



Krümmungsverhalten:
Das Krümmungsverhalten wird mit der 2.Ableitungsfunktion überprüft.
Bedingung für Rechtskrümmung: $f''(x) < 0$

$-6x < 0 \,|:(-6)$

$\Leftrightarrow x > 0$

(Hinweis: Bei der Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um)

Bedingung für Linkskrümmung: $f''(x) > 0$

$$-6x > 0 \,|:(-6)$$
$$\Leftrightarrow x < 0$$

Für x > 0 ist das Schaubild rechtsgekrümmt und für x < 0 linksgekrümmt.

2.2 Flächeninhalt:

$$A = \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{2}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 4 - (-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2) = 6{,}75 \text{ FE}$$

2.3 a) Die Aussage ist falsch, da die Ableitungsfunktion an der Stelle x = 3 eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat. Bei einem Tiefpunkt müsste bei x = 3 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von – nach + vorliegen.

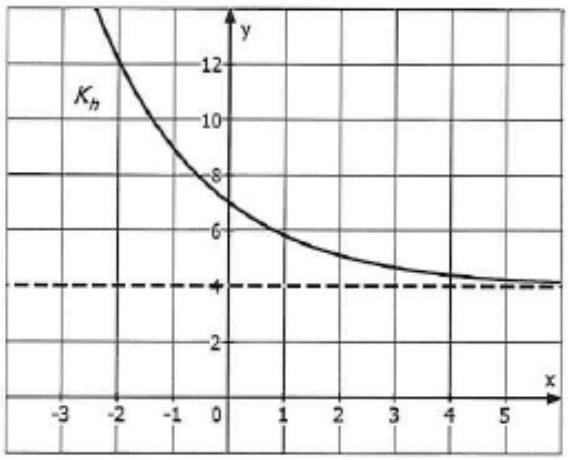
b) Die Aussage ist richtig, da das Schaubild von g' zwei Extrempunkte besitzt.

c) Die Aussage ist wahr. Im Intervall $1 \le x \le 2$ ist das Schaubild von g' monoton fallend. Daher ist $g''(x)$ in diesem Intervall negativ und daraus ergibt sich die Rechtskrümmung des Schaubildes von g.

2.4 $h(x) = 3e^{-0{,}5x} + 4$

Zum Skizzieren des Schaubildes sollte man die waagrechte Asymptote der Funktion ermitteln:
Für $x \to +\infty$ lautet die waagrechte Asymptote y = 4.

Außerdem kann man mit Hilfe der Wertetabelle des WTR weitere Punkte des Schaubildes berechnen.



Gleichung der Tangente:
Ansatz: $y = mx + c$

Es gilt $h'(x) = 3 \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} = -1,5 \cdot e^{-0,5x}$

Steigung der Tangente: $h'(0) = -1,5$
y-Wert des Berührpunktes: $h(0) = 7$

Einsetzen der Steigung m = -1,5 und des Punktes B(0|7) in den Ansatz:
$7 = -1,5 \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = 7$

Tangentengleichung: $y = -1,5x + 7$

2.5 Die momentane Änderungsrate entspricht der Steigung der Tangente.
Gesucht ist somit die Stelle, bei der die Tangentensteigung -1 ist.

Bedingung: $h'(x) = -1$

$$-1,5e^{-0,5x} = -1 \Leftrightarrow e^{-0,5x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -0,5x = \ln(\frac{2}{3}) \Leftrightarrow x = -2\ln(\frac{2}{3}) \approx 0,81$$