Hauptprüfung Fachhochschulreife 2023

Baden-Württemberg

Pflichtteil Variante 1

Hilfsmittel: keine

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe 1:

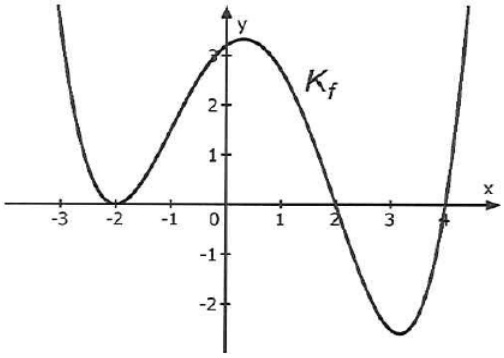
1.1 Lösen Sie die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$. (4 Punkte)

1.2 Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass x = -1 eine Wendestelle von h ist. (4 Punkte)

1.3 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 2e^{4x} - 16x,\ x \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie die Nullstellen der ersten Ableitung von g. (3 Punkte)

1.4 Skizzieren Sie das Schaubild mit der Gleichung $y = -x^4 + 1$. (3 Punkte)

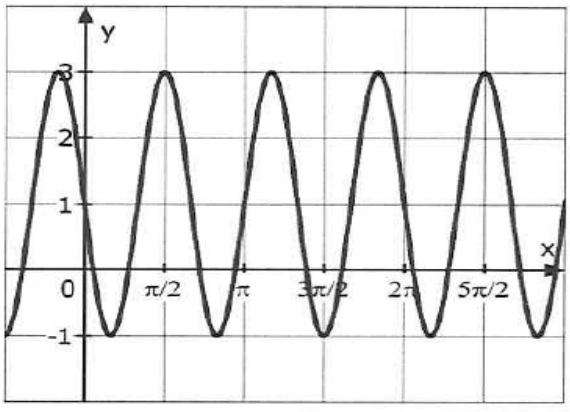
1.5 Gegeben ist das Schaubild K_f einer Funktion f sowie eine Wertetabelle von f, f' sowie f''. Die Wertetabelle enthält genau vier Fehler.
Begründen Sie, welche Werte nicht mit dem Schaubild K_f übereinstimmen.



x	-2	0	2	4
$f(x)$	0	2	0	0
$f'(x)$	0	$0{,}8$	$3{,}2$	$-7{,}2$
$f''(x)$	-3	$-2{,}4$	0	12

(8 Punkte)

1.6 Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm zu nebenstehendem Schaubild.



(4 Punkte)

1.7 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\pi} -\sin(\frac{1}{2}x)dx$. (4 Punkte)

Lösung

1.1 $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ Substitution: $x^2 = u$

$u^2 + 2u - 3 = 0$

abc-Formel: $u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $u_1 = -3$ $u_2 = 1$

(alternativ kann man die Gleichung auch mit der pq-Formel lösen)

Rücksubstitution: $x^2 = -3$ Gleichung ist nicht lösbar

$x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

Die Gleichung besitzt 2 Lösungen.

1.2 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1$

$h'(x) = x^2 + 2x + 1$

$h''(x) = 2x + 2$

$h'''(x) = 2$

Bedingung für eine Wendestelle: $h''(x) = 0$ und $h'''(x) \neq 0$

Da die Wendestelle x = -1 vorgegeben ist, kann dieser Wert zur Prüfung gleich genutzt werden:

$h''(-1) = -2 + 2 = 0$

$h'''(-1) = 2 \neq 0$

Da die Bedingung für eine Wendestelle erfüllt ist, existiert bei x = -1 eine Wendestelle.

1.3 $g(x) = 2e^{4x} - 16x$

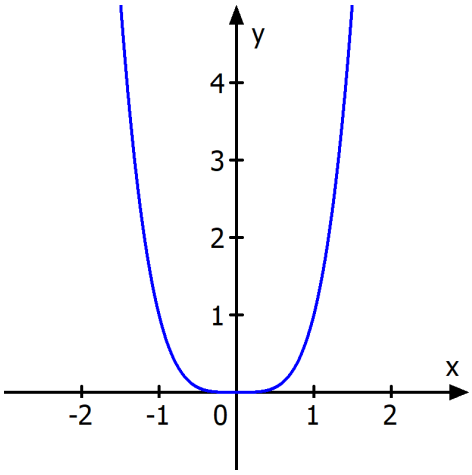
$g'(x) = 8e^{4x} - 16$

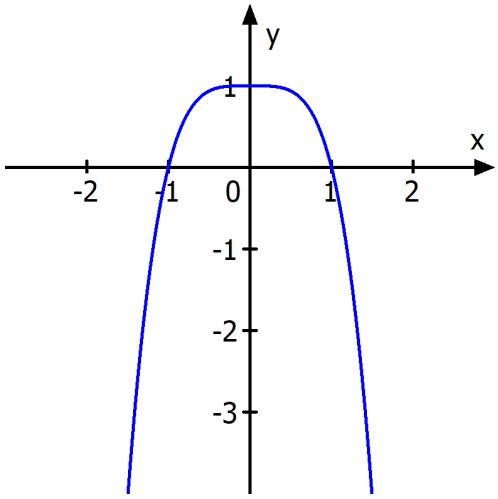
Nullstelle der ersten Ableitung:

$8e^{4x} - 16 = 0 \Leftrightarrow e^{4x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\ln(2)$

1.4 Das Schaubild von $y = x^4$ ist symmetrisch zur y-Achse, nach oben geöffnet und hat im Ursprung einen Tiefpunkt (linke Abbildung).

Das gesuchte Schaubild von $y = -x^4 + 1$ (rechte Abbildung) ist nach unten geöffnet (gespiegelt an der x-Achse) und um 1 Einheit nach oben verschoben. Es besitzt daher den Hochpunkt (0|1).





1.5 1.Fehler:
Laut Tabelle gilt f(0) = 2 (zweite Zeile in der Tabelle)
Das Schaubild von f schneidet die y-Achse aber in einem Punkt, dessen y-Wert größer als 3 ist.

2.Fehler:
Laut Tabelle gilt $f'(2) = 3{,}2$ (dritte Zeile in der Tabelle)
Das Schaubild von f besitzt bei x = 2 jedoch eine Tangente mit negativer Steigung.

3.Fehler:
Laut Tabelle gilt $f'(4) = -7{,}2$ (dritte Zeile in der Tabelle)
Das Schaubild von f besitzt bei x = 4 jedoch eine Tangente mit positiver Steigung.

4.Fehler:
Laut Tabelle gilt $f''(-2) = -3$ (vierte Zeile in der Tabelle)
Das Schaubild von f besitzt bei x = -2 einen Tiefpunkt (linksgekrümmtes Schaubild), daher muss die zweite Ableitung an der Stelle x = -2 positiv sein.

1.6 Das Schaubild besitzt auf der y-Achse einen Wendepunkt mit negativer Steigung. Daher handelt es sich um eine „Minus-Sinus-Funktion“ mit dem Ansatz $y = a \cdot \sin(bx) + d$ wobei a < 0 ist.

Die Höhe der waagrechten Mittellinie ist 1, also ist d = 1.
Der senkrechte Abstand vom Hochpunkt zur Mittellinie ist 2.
Daher ist die Amplitude 2 und es gilt a = -2.

Aus dem Schaubild kann 1 Periodenschritt nicht exakt abgelesen werden.
Vom Wendepunkt (0|1) bis zum Wendepunkt $(2\pi\,|\,1)$ werden insgesamt 3 Perioden zurückgelegt.

Somit besitzt eine Periode die Länge $p = \frac{2\pi}{3}$.

Daraus folgt $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3$

Gleichung der Funktion: $y = -2\sin(3x) + 1$

1.7 $$\int_0^{\pi} -\sin(\frac{1}{2}x)dx = \left[\frac{1}{1/2} \cdot \cos(\frac{1}{2}x)\right]_0^{\pi} = \left[2\cos(\frac{1}{2}x)\right]_0^{\pi} = 2\cos(\frac{1}{2}\pi) - 2\cos(0) = -2$$