

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023 - Leistungsfach
Baden-Württemberg

Wahlteil Stochastik – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

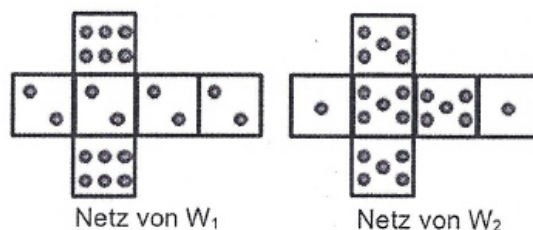
Aufgabe C2

Michael und Torsten spielen mit den beiden Würfeln, deren Netze abgebildet sind, folgendes Spiel:

Michael würfelt mit dem Würfel W_1 ,

Torsten würfelt mit dem Würfel W_2 . Der

Spieler mit der höheren Augenzahl gewinnt.



- a) Geben Sie alle möglichen Würfelergbnisse an, bei denen Michael das Spiel gewinnt. (1 VP)
Begründen Sie, dass Michaels Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$ beträgt. (1 VP)
- b) Michael und Torsten spielen 30 Spiele. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Michael gewinnt mindestens 13, aber höchstens 20 Spiele.“ (1 VP)
B: „Torsten gewinnt mehr Spiele als Michael.“ (1 VP)
- c) Es werden n Spiele gespielt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Michael dabei nur das letzte Spiel gewinnt, soll weniger als 5% betragen. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von n . (2 VP)
- d) Das Spiel wird folgendermaßen verändert: Vor dem Würfeln wird ein Glücksrad mit einem grünen und einem roten Sektor einmal gedreht. Wenn dabei grün erscheint, dann behalten Michael und Torsten ihre Würfel: erscheint rot, dann tauschen sie die Würfel. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Michael bei diesem Spiel eine höhere Zahl als Torsten würfelt, beträgt $\frac{7}{15}$. Bestimmen Sie für den grünen Sektor die Größe des Mittelpunktswinkels. (2,5 VP)

Torsten hat den Verdacht, dass beim Würfel W_2 die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 5 nicht $\frac{2}{3}$ beträgt. Daher wird ein einseitiger Hypothesentest mit 500 Würfeln auf dem Signifikanzniveau s durchgeführt. Dabei ergibt sich die Entscheidungsregel, dass die Nullhypothese genau dann abgelehnt wird, wenn weniger als 318-mal die Augenzahl 5 erzielt wird.

- e) Formulieren Sie die zugehörige Nullhypothese. (0,5 VP)
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Prozentwerte, die für s in Frage kommen. (1,5 VP)
- f) Formulieren Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang. (1 VP)
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass beim Würfel W_2 die Augenzahl 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% erzielt wird. (1 VP)

Lösungen**Aufgabe C2**

- a) *Geben Sie alle möglichen Würfelergebnisse an, bei denen Michael das Spiel gewinnt.*

Die möglichen Würfelergebnisse sind: (2;1) , (6;1) , (6;5)

Begründen Sie, dass Michaels Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$ beträgt.

$$P((2;1)) + P((6;1)) + P((6;5)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

- b) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse*

Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Spiele, die Michael gewinnt.

X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = \frac{5}{9}$.

$$P(A) = P(13 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 12) \approx 0,922 - 0,063 = 0,859$$

Ereignis B: Wenn Torsten mehr Spiele gewinnt als Michael, darf Michael maximal 14 Spiele gewinnen.

$$P(B) = P(X \leq 14) \approx 0,213$$

- c) *Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von n .*

Die Wahrscheinlichkeit, dass Michael die ersten $n-1$ Spiele verliert und das letzte Spiel gewinnt beträgt $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{9}$.

$$\text{Bedingung: } \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{9} < 0,05$$

Ausprobieren mit dem Taschenrechner:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{5}{9} \approx 0,11 > 0,05$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \frac{5}{9} \approx 0,049 < 0,05$$

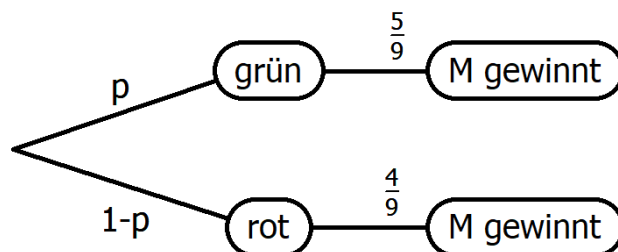
Es gilt $n - 1 = 3 \Leftrightarrow n = 4$.

Somit müssen mindestens 4 Spiele gespielt werden.

d) Bestimmen Sie für den grünen Sektor die Größe des Mittelpunktswinkels.

Zur Berechnung des Mittelpunktswinkels muss zunächst die Wahrscheinlichkeit p berechnet werden, dass der grüne Sektor gedreht wird.

Der rote Sektor wird mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ gedreht.



$$P(\text{M gewinnt}) = p \cdot \frac{5}{9} + (1-p) \cdot \frac{4}{9} = \frac{7}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}p + \frac{4}{9} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow p = 0,2$$

Der Mittelpunktswinkel des grünen Sektors beträgt $360^\circ \cdot 0,2 = 72^\circ$.

e) Formulieren Sie die zugehörige Nullhypothese.

Der Ablehnungsbereich ist $\bar{A} = \{0, 1, 2, \dots, 317\}$.

Aus diesem Ablehnungsbereich kann man erkennen, dass es sich um einen linksseitigen Hypothesentest handelt.

Es gilt $H_1 : p < \frac{2}{3}$

Daraus folgt $H_0 : p \geq \frac{2}{3}$.

Hinweis: (Meinung des Autors)

Die Aufgabenstellung ist verwirrend gestellt.

Der Einleitungssatz der Aufgabe lautet:

„Torsten hat den Verdacht, dass beim Würfel W_2 die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 5 nicht $\frac{2}{3}$ beträgt.“

Aus diesem Einleitungssatz kann man schließen, dass ein zweiseitiger Hypothesentest notwendig ist, da sich der Verdacht nicht auf eine konkrete Richtung bezieht. Korrekt wäre folgender Einleitungssatz gewesen:

„Torsten hat den Verdacht, dass beim Würfel W_2 die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 5 **weniger als** $\frac{2}{3}$ beträgt.“

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Prozentwerte, die für s in Frage kommen.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen eine 5 erzielt wird.

X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = \frac{2}{3}$.

$$P(X \text{ liegt im Ablehnungsbereich}) = P(X \leq 317) = 0,0673$$

Außerdem gilt $P(X \leq 318) = 0,0804$.

Das Signifikanzniveau gibt die maximale Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art an. Dieses beträgt mindestens 6,73% und weniger als 8,04%.

Somit kommen für das Signifikanzniveau s die Werte 7% und 8% in Betracht.

f) *Formulieren Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.*

Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt, obwohl die Wahrscheinlichkeit eine 5 zu würfeln, kleiner als $\frac{2}{3}$ ist (das heißt dass die Gegenhypothese H_1 wahr ist).

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass beim Würfel W_2 die Augenzahl 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% erzielt wird.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen eine 5 erzielt wird.

X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,6$.

$$P(\text{Fehler 2. Art}) = P(X \text{ liegt nicht im Ablehnungsbereich})$$

$$= P(X \geq 318) = 1 - P(X \leq 317) \approx 0,0545$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art beträgt ca. 5,4%.