Hauptprüfung Abiturprüfung 2023 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

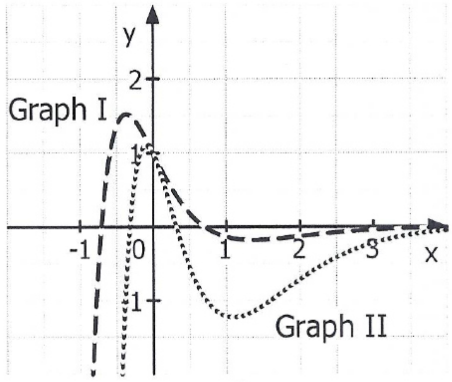
allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe A 1.1 (15 VP)

Für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist G_t der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = \left(1 - tx^2\right) \cdot e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.



a) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von G_t mit der y-Achse unabhängig von t ist. (0,5 VP)
Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_{10} dargestellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1 VP)

b) Begründen Sie, dass f_0 umkehrbar ist. (1 VP)
Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f_0 und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an. (1,5 VP)

c) Betrachtet wird die Tangente an G_0 im Punkt $B(0,5 \mid f_0(0,5))$.
Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der x-Achse. (1 VP)
Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck.
Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt. (1,5 VP)
Bei Rotation dieses Dreiecks um die x- bzw. y-Achse entsteht jeweils ein Körper.
Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang folgende Ungleichung geometrisch:
$$\frac{2\pi}{3e} > \frac{4\pi}{3e^2}$$ (1,5 VP)

d) Für einen bestimmten Wert von t besitzt der Graph G_t zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 8 haben.
Berechnen Sie diesen Wert von t. (2 VP)

e) Die Funktion H mit $H(x) = -\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}$ ist eine Stammfunktion von h mit $h(x) = f_t(x) - f_{t+2}(x)$. Die Graphen G_t und G_{t+2} besitzen für x > 0 keine gemeinsamen Punkte und schließen mit der y-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. (2,5 VP)

f) Für jedes t > 0 hat der Graph G_t zwei Extrempunkte P_t und Q_t.
Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$ liegt. (2,5 VP)

Aufgabe A 1.2 (5 VP)

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit k > 0, deren Ableitungsfunktionen f_k' folgende Gleichung besitzen:

$$f_k'(x) = -\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k)$$

a) Jeder Graph der Schar besitzt einen Wendepunkt. Betrachtet werden die Tangenten in diesen Wendepunkten. Zeigen Sie, dass alle diese Wendetangenten parallel zueinander sind. (2 VP)

b) Jeder Graph der Schar hat einen Extrempunkt im ersten Quadranten. Alle diese Extrempunkte liegen auf der ersten Winkelhalbierenden. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f_k. (3 VP)

Lösungen

Aufgabe A 1.1

a) *Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von G_t mit der y-Achse unabhängig von t ist.*

$f_t(0) = (1-0)\cdot e^0 = 1$

Der Schnittpunkt $S_y(0\,|\,1)$ ist unabhängig von t.

Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_{10} dargestellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Es gilt $f_{10}(1) = (1-10)\cdot e^{-2} \approx -1{,}22$.
Da der Punkt A(1|-1,22) auf dem Graphen G_{10} liegt, muss Graph II der Graph G_{10} sein.

b) *Begründen Sie, dass f_0 umkehrbar ist.*

Es gilt $f_0(x) = e^{-2x}$.
Die Funktion f_0 ist streng monoton fallend, da $f_0'(x) = -2e^{-2x} < 0$ ist.
Daher ist f_0 umkehrbar.

Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f_0 und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an.

$y = e^{-2x}$
Tausch der Variablen: $x = e^{-2y}$
Auflösen nach y: $-2y = \ln(x) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}\ln(x)$
Term der Umkehrfunktion: $\overline{f_0}(x) = -\frac{1}{2}\ln(x)$
Definitionsmenge: $D_{\overline{f_0}} = \left]0;+\infty\right[$

c) *Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der x-Achse.*

Steigung der Tangente:
Es gilt $f_0'(x) = -2e^{-2x}$.
Daraus folgt $f_0'(0{,}5) = -2e^{-1}$
Steigungswinkel der Tangente: $\tan(\alpha) = m \Leftrightarrow \tan(\alpha) = -2e^{-1} \Leftrightarrow \alpha \approx -36{,}3°$
Der Steigungswinkel beträgt $\alpha^* = -36{,}3° + 180° = 143{,}7°$.
Der Schnittwinkel β muss kleiner als 90° sein: $\beta = 180° - 143{,}7° = 36{,}3°$

Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt.

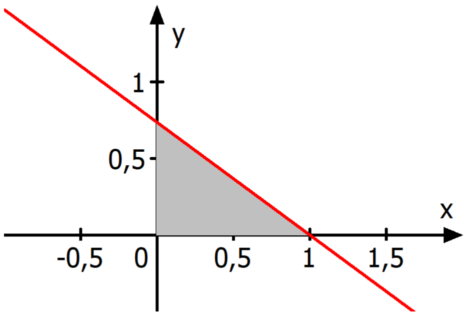
Tangentenformel: $y = f_0'(u) \cdot (x-u) + f_0(u)$
Für u = 0,5 gilt: $y = f_0'(0{,}5) \cdot (x-0{,}5) + f_0(0{,}5)$

Gleichung der Tangente: $y = -2e^{-1} \cdot (x-0{,}5) + e^{-1} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{e}x + \frac{2}{e}$

Schnittstelle mit der x-Achse: $0 = -\frac{2}{e}x + \frac{2}{e} \Leftrightarrow x = 1$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid \frac{2}{e})$

Die Katheten haben eine Länge von 1 und $\frac{2}{e}$.



Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang die Ungleichung geometrisch.

Bei der Rotation um die x-Achse entsteht ein Kegel mit h = 1 und $r = \frac{2}{e}$:

$$V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^2 \cdot 1 = \frac{4\pi}{3e^2}$$

Bei der Rotation um die y-Achse entsteht ein Kegel mit r = 1 und $h = \frac{2}{e}$:

$$V_y = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{e} = \frac{2\pi}{3e}$$

Interpretation der Ungleichung: Das Volumen des Kegels, der bei Rotation der Dreiecksfläche um die y-Achse entsteht ist größer als der Kegel, der bei Rotation um die x-Achse entsteht.

d) *Berechnen Sie diesen Wert von t.*

Berechnung der Schnittstellen mit der x-Achse:
$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow (1-tx^2) \cdot e^{-2x} = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
Gleichung I): $e^{-2x} = 0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $1 - tx^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{t}}$

Der Abstand der Schnittpunkte ist $2\cdot\sqrt{\frac{1}{t}}$.

Bedingung: $2\cdot\sqrt{\frac{1}{t}}=8 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{t}}=4$ |quadrieren

$\Rightarrow \frac{1}{t}=16 \Leftrightarrow t=\frac{1}{16}$

e) *Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.*

$$A(z)=\left|\int_0^z (f_t(x)-f_{t+2}(x))dx\right|=\left|\left[-\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2x}\right]_0^z\right|=\left|-\left(z^2+z+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2z}-(-\frac{1}{2})\right|$$

$$=\left|-\left(z^2+z+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2z}+\frac{1}{2}\right|$$

Für $z\to+\infty$ gilt $A(z)\to\frac{1}{2}$

f) *Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Gerade mit der Gleichung $x=\frac{1}{2}$ liegt.*

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f_t'(x)=0$

Es gilt $f_t'(x)=-2tx\cdot e^{-2x}+(1-tx^2)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=2e^{-2x}(-tx-1+tx^2)$.

$2e^{-2x}(-tx-1+tx^2)=0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
Gleichung I): $2e^{-2x}=0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $tx^2-tx-1=0 \quad \Rightarrow x_{1,2}=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4t}}{2t}$
Da in der Aufgabe steht, dass der Graph G_t zwei Extrempunkte besitzt, muss die hinreichende Bedingung nicht geprüft werden.

Mittelwert der Extremstellen:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{t+\sqrt{t^2+4t}}{2t}+\frac{t-\sqrt{t^2+4t}}{2t}}{2}=\frac{\frac{t+\sqrt{t^2+4t}+t-\sqrt{t^2+4t}}{2t}}{2}=\frac{\frac{2t}{2t}}{2}=\frac{1}{2}$$

Da der Mittelwert der Extremstellen $\frac{1}{2}$ beträgt, ist der Nachweis erbracht.

Aufgabe A 1.2

a) *Zeigen Sie, dass alle diese Wendetangenten parallel zueinander sind.*

Hinreichende Bedingung für Wendestelle: $f_k''(x)=0$ und $f_k'''(x)\neq 0$

$$f_k'(x)=-\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k)=-\frac{1}{k^2}(x^2+2kx-3k^2)$$
$$f_k''(x)=-\frac{1}{k^2}(2x+2k)$$
$$f_k'''(x)=-\frac{1}{k^2}\cdot 2$$

$$-\frac{1}{k^2}(2x+2k)=0 \Leftrightarrow 2x+2k=0 \Leftrightarrow x=-k$$

$f_k'''(-k)=-\frac{2}{k^2}\neq 0$ also existiert bei x = -k eine Wendestelle.

Steigung der Wendetangente: $f_k'(-k)=-\frac{1}{k^2}\cdot(k^2-2k^2-3k^2)=-\frac{1}{k^2}\cdot(-4k^2)=4$

Da die Steigung unabhängig von k ist, sind alle Wendetangenten parallel zueinander.

Hinweis:
Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, die Wendestelle x = -k zu erhalten.
Die Ableitungsfunktion ist eine ganzrationale Funktion 2.Grades.
Somit ist die Funktion f eine ganzrationale Funktion 3.Grades.
Solch eine Funktion ist immer zu ihrem Wendepunkt symmetrisch.

Mit dem Ansatz $f_k'(x)=0$ können die Extremstellen des Graphen von f_k berechnet werden.

$$-\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k)=0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt: $x_1=k$ und $x_2=-3k$

Mittelwert der Extremstellen: $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k+(-3k)}{2}=\frac{-2k}{2}=-k$

Dies ist die Wendestelle des Graphen von f_k.

b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f_k.

In a) wurde berechnet: $f_k'(x)=-\frac{1}{k^2}(x^2+2kx-3k^2)$

Alle Stammfunktionen von f_k' lauten $f_k(x)=-\frac{1}{k^2}\cdot(\frac{1}{3}x^3+kx^2-3k^2x)+C$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f_k'(x) = 0$

$-\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k) = 0$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt: $x_1 = k$ und $x_2 = -3k$

Da in der Aufgabe vorgegeben ist, dass jeder Graph im 1.Quadrant einen Extrempunkt besitzt, muss der x-Wert des Extrempunktes x = k sein (wegen k > 0).

Da der Extrempunkt auf der ersten Winkelhalbierenden y = x liegt, lautet der vorgegebene Extrempunkt E(k|k).

Bedingung: $f_k(x) = k$

$k = -\frac{1}{k^2} \cdot (\frac{1}{3}k^3 + k^3 - 3k^3) + C \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}k + C \Leftrightarrow C = -\frac{2}{3}k$

Gesuchte Funktionsgleichung: $f_k(x) = -\frac{1}{k^2} \cdot (\frac{1}{3}x^3 + kx^2 - 3k^2x) - \frac{2}{3}k$