

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Pflichtteil – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe 1: (1 VP und 1,5 VP)

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3 .

Die Abbildung in der Anlage zeigt die Position von x_1, x_2 und x_3 .

- Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.
- Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f .

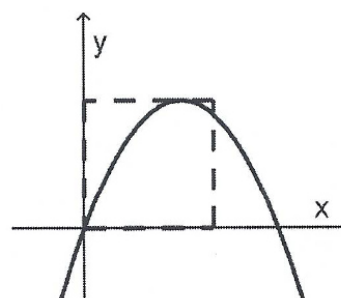
Aufgabe 2: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2ax$, $a \in]1; +\infty[$.

Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

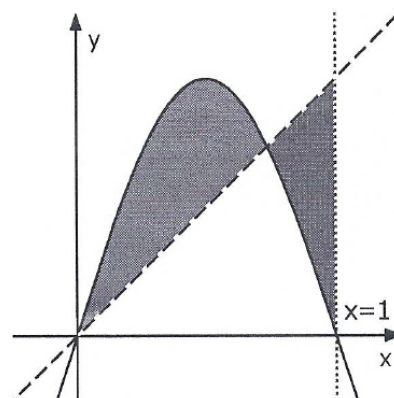
- Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

- Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a .

**Aufgabe 3: (1 VP und 1,5 VP)**

Abgebildet sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi x)$ sowie eine Ursprungsgerade g mit der Steigung m .

- Bestimmen Sie einen Term der Stammfunktion von f , deren Graph den Ursprung enthält.
- Berechnen Sie den Wert von m , für den die Inhalte der beiden markierten Flächen gleich groß sind.



Aufgabe 4: (0,5 VP und 2 VP)

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h , die sich in B schneiden.

Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.
- Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

Aufgabe 5: (1 VP und 1,5 VP)

Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit den Zahlen 2 bzw. 3 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen die Zahl 2 erzielt wird, beträgt p . Bei einem Spiel dreht eine Person das Glücksrad genau so oft, bis die Summe der erzielten Zahlen 5, 6 oder 7 beträgt. Bei der Summe 6 gewinnt die Person das Spiel, sonst verliert sie.

- Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

- Die beiden folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig:

E: „Beim Drehen des Glücksrads wird die Zahl 2 erzielt.“

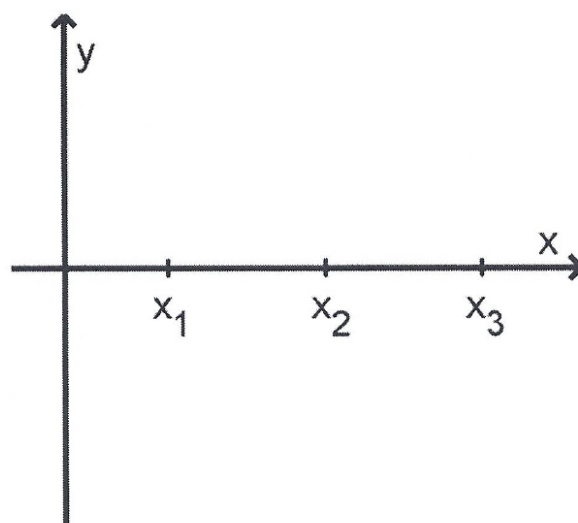
G: „Die Person gewinnt das Spiel.“

Ermitteln Sie eine Gleichung, die die Variable p enthält und die Berechnung des Werts von p ermöglicht.

Aufgabe 6: (1 VP und 1,5 VP)

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

- Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.
- Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

Abbildung zu Aufgabe 1 (Pflichtteil Aufgabensatz 2)

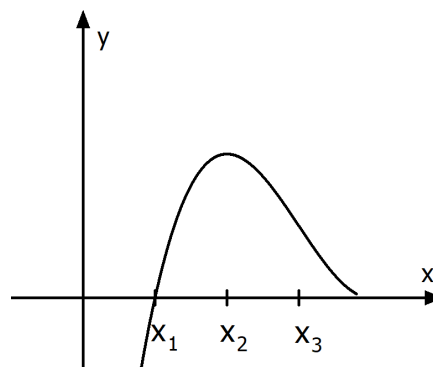
Lösungen**Aufgabe 1:**

- a) Da f' an der Stelle x_3 ein Minimum hat, ist der Grad von f' mindestens 2.
Damit ist der Grad von f mindestens 3.

b)

Der Graph von f hat bei x_1 eine Nullstelle
und bei x_2 eine Extremstelle und bei x_3
eine Wendestelle.

Da f' bei x_3 ein Minimum besitzt, besitzt die
Wendestelle von f eine Tangente mit einer
minimalen Steigung.

**Aufgabe 2:**

- a) Berechnung des Flächeninhalts:

$$A = \int_0^{2a} (-x^2 + 2ax) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^{2a} = -\frac{8}{3}a^3 + 4a^3 - 0 = \frac{4}{3}a^3$$

- b) Da die Nullstellen von f bei $x = 0$ und $x = 2a$ sind, besitzt der Hochpunkt aus
Symmetriegründen die Koordinaten $H(a|f(a))$.
Es gilt $f(a) = -a^2 + 2a^2 = a^2$, das heißt die Breite des Quadrats (und damit auch
die Länge des Quadrats) ist a^2 .

Flächeninhalt des Quadrats: $A_Q = a^2 \cdot a^2 = a^4$

$$\text{Bedingung: } a^4 = \frac{4}{3}a^3 \Leftrightarrow a^4 - \frac{4}{3}a^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 \cdot \left(a - \frac{4}{3}\right) = 0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt: $a = 0$ (scheidet als Lösung aus, da laut
Aufgabenstellung $a > 1$ sein soll) und $a = \frac{4}{3}$.

Somit gilt $a = \frac{4}{3}$.

Aufgabe 3:

- a) Stammfunktion von $f(x) = \sin(\pi x)$:

$$F(x) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + C$$

$$\text{Bedingung: } F(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\pi} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{Die gesuchte Stammfunktion lautet } F(x) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi}$$

b) Die Gerade g hat die Gleichung $y = mx$.

Die beiden Flächenstücke werden jeweils vom Schaubild von f und der Geraden g oben und unten eingeschlossen.

$$\text{Linkes Flächenstück: } A_{\text{links}} = \int_0^{\text{Schnittstelle}} (f(x) - mx) dx$$

$$\text{Rechtes Flächenstück: } A_{\text{rechts}} = \int_{\text{Schnittstelle}}^1 (mx - f(x)) dx$$

$$\text{Bedingung: } A_{\text{links}} - A_{\text{rechts}} = 0 \Leftrightarrow A_{\text{links}} + (-A_{\text{rechts}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\text{Schnittstelle}} (f(x) - mx) dx + \left(- \int_{\text{Schnittstelle}}^1 (mx - f(x)) dx \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\text{Schnittstelle}} (f(x) - mx) dx + \int_{\text{Schnittstelle}}^1 (f(x) - mx) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - mx) dx = 0$$

$$\int_0^1 (f(x) - mx) dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{1}{2} mx^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{\pi} \cdot (-1) - \frac{1}{2} m - \left(-\frac{1}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} m$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{\pi}$$

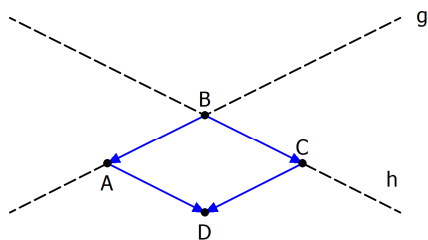
Aufgabe 4:

$$\text{a) Gleichung der Geraden g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Prüfung, ob } A(3|5|5) \text{ auf g liegt: } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 3 = 1 + r \\ \Rightarrow 5 = 1 + 2r \\ 5 = 1 + 2r \end{array}$$

Das LGS wird für $r = 2$ erfüllt, also liegt A auf g.

b) Skizze:



Länge der Strecke $\overline{AB}$: $|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 6$

1. Lösungsmöglichkeit:

Koordinaten von C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also C(7|1|1)

Koordinaten von D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, also D(9|5|5)

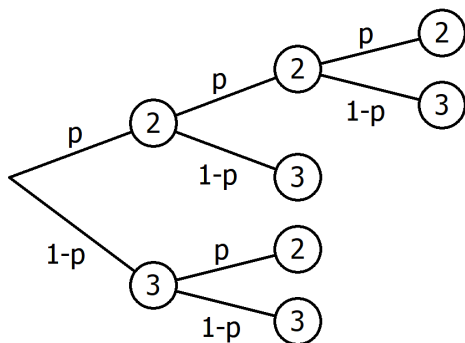
2. Lösungsmöglichkeit:

Koordinaten von C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also C(-5|1|1)

Koordinaten von D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, also D(-3|5|5)

Aufgabe 5:

a) Baumdiagramm:



b) Bedingung für die Unabhängigkeit der Ereignisse E und G: $P(E \cap G) = P(E) \cdot P(G)$

$$P(G) = P(222) + P(33) = p^3 + (1-p)^2$$

$$P(E) = p$$

$$P(E \cap G) = P(222) = p^3$$

$$\Rightarrow p^3 = p \cdot [p^3 + (1-p)^2] \quad | :p$$

$$\Leftrightarrow p^2 = p^3 + (1-p)^2$$

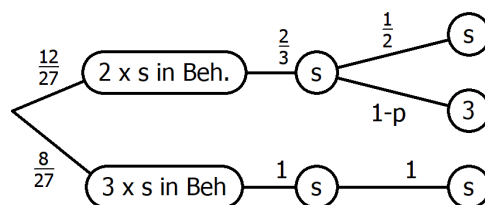
Aufgabe 6:

a) $P(\text{mindestens zwei schwarze Kugeln}) = P(2 \text{ schwarze}) + P(3 \text{ schwarze})$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27} \quad \text{was zu zeigen war}$$

Hinweis: Der Faktor 3 ergibt sich aufgrund der Möglichkeiten ssg, sgs, gss.

b) Es können nur dann zwei schwarze Kugeln entnommen werden, wenn sich in der Urne mindestens 2 schwarze Kugeln befinden.



$$P(2 \text{ schwarze Kugeln werden gezogen}) = \frac{12}{27} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{27} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{4}{27} + \frac{8}{27} = \frac{12}{27}$$