

Hauptprüfung Abiturprüfung 2023 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Pflichtteil – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: keine

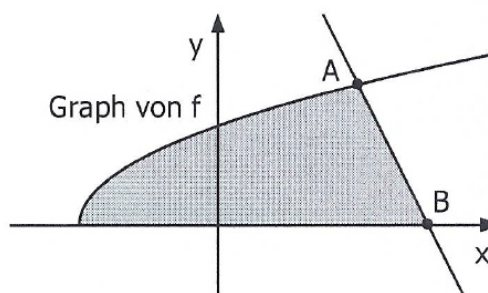
allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe 1: (0,5 VP und 2 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+2}$ und die Gerade durch die Punkte $A(2|2)$ und $B(3|0)$.



- Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f an.
- Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

Aufgabe 2: (1 VP und 1,5 VP)

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f , dessen einzige Extrempunkte $A(-1|1)$ und $B(0|0)$ sind, sowie den Punkt P .

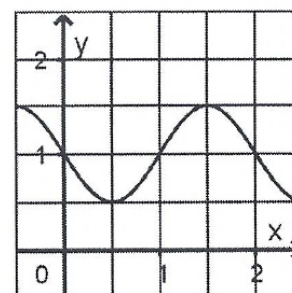
- Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = -f(x-3)$ an.
- Der Graph einer Stammfunktion von f verläuft durch P . Skizzieren Sie diesen Graphen in der Abbildung.

Aufgabe 3: (1 VP und 1,5 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f .

- Beurteilen Sie die folgende Aussage:
„Für jeden Wert von x mit $0 \leq x \leq 2$ ist die Steigung des Graphen von f kleiner als 3.“

- Mit dem Term $\pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2 dx$ kann das Volumen eines Körpers berechnet werden. Begründen Sie, dass dieses Volumen größer als $\pi \cdot 0,5^2 + \pi \cdot 1^2$ ist.



Aufgabe 4: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass g in der Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

b) Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und

$a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

Aufgabe 5: (0,5 VP und 2 VP)

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass g und h nicht identisch sind.

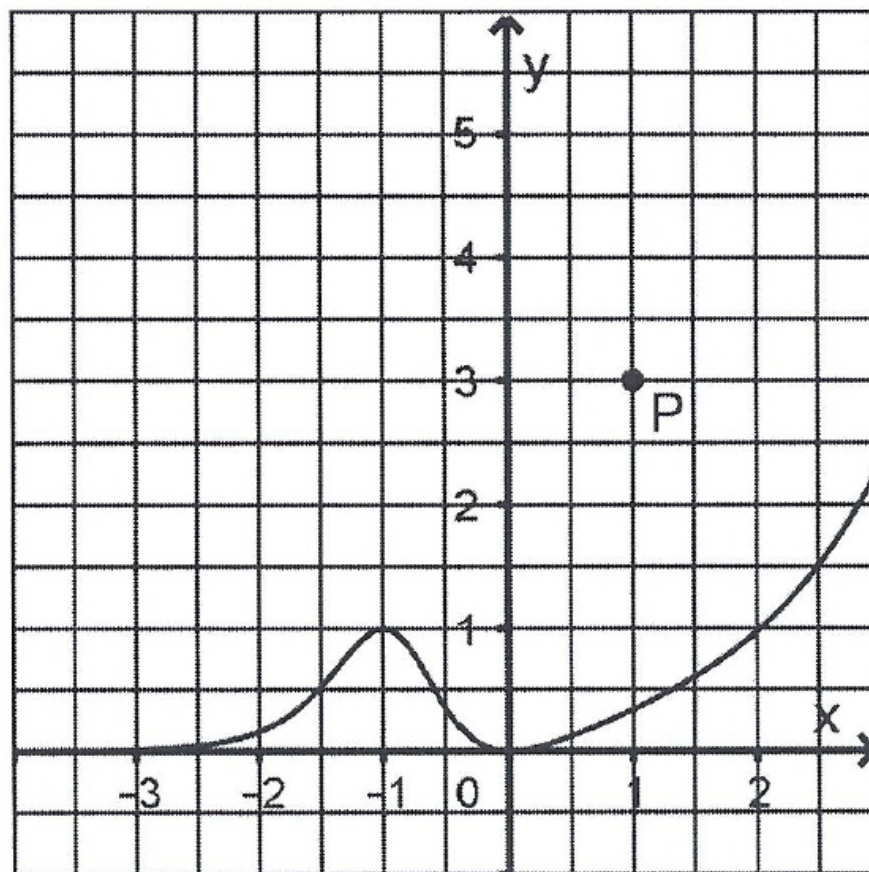
b) Die Gerade g soll durch Spiegelung an einer Ebene auf die Gerade h abgebildet werden. Bestimmen Sie eine Gleichung einer geeigneten Ebene und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 6: (0,5 VP und 2 VP)

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl a . Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

a) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann.

b) Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von X ist 4. Bestimmen Sie den Wert von a .

Abbildung zu Aufgabe 2 (Pflichtteil Aufgabensatz 1)

Lösungen
Aufgabe 1:

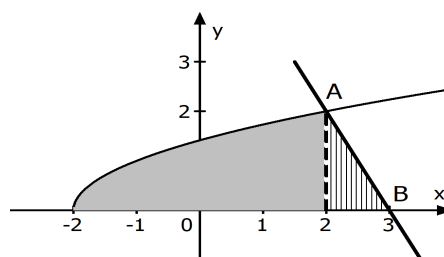
a) maximale Definitionsmenge:

Bedingung: $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$$D = [-2; +\infty[$$

b)

Um den Flächeninhalt zu berechnen, muss die Fläche aufgeteilt werden. Der linke Flächenteil kann mit Hilfe eines Integrals berechnet werden, der rechte Flächenteil ist ein Dreieck.



$$A_{\text{links}} = \int_{-2}^2 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^2 = \left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^2 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{4^3} = \frac{16}{3}$$

$$A_{\text{rechts}} = A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$A_{\text{gesamt}} = \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3} \text{ FE}$$

Aufgabe 2:

a) Das Schaubild von $g(x) = -f(x-3)$ ergibt sich aus dem Schaubild von f durch eine Spiegelung an der x -Achse und einer anschließenden Verschiebung um 3 Längeneinheiten nach rechts.

Das Schaubild von f besitzt den Hochpunkt $H(-1|1)$.

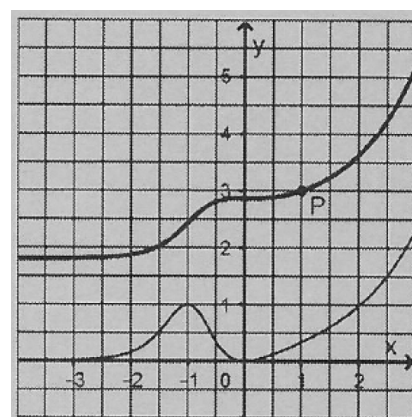
Durch die Spiegelung an der x -Achse wird aus dem Hochpunkt ein Tiefpunkt mit den Koordinaten $T(-1|-1)$. Die anschließende Verschiebung um 3 LE nach rechts ergibt den gesuchten Tiefpunkt $T^*(2|-1)$.

b)

Erklärung:

An der Stelle $x = 0$ hat der Graph der Stammfunktion einen Sattelpunkt, da der Graph von f dort eine Nullstelle ohne VZW besitzt. Die Stammfunktion ist monoton wachsend, da sich der Graph von f oberhalb bzw. auf der x -Achse befindet.

Für $x \rightarrow -\infty$ nähert sich der Graph von f der x -Achse an. Daher besitzt der Graph der Stammfunktion für $x \rightarrow -\infty$ eine waagrechte Asymptote.

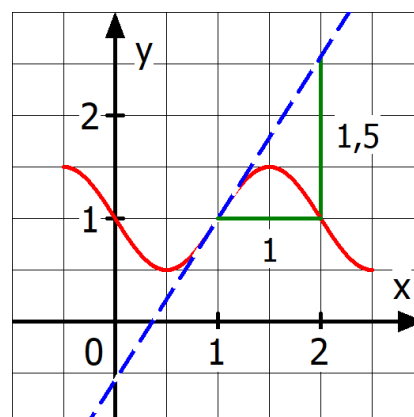


Aufgabe 3:

a)

Aus der Abbildung kann man entnehmen, dass die Steigung des Graphen von f im Punkt $A(1|f(1))$ am größten ist, da sich bei $x = 1$ eine Wendestelle befindet.

Die Steigung der Tangente in diesem Punkt ist ca. 1,5 und damit kleiner als 3.
Die Aussage ist richtig.



b)

Der Term $V^* = \pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2 dx$ gibt das Volumen des Körpers an, der entsteht, wenn das Flächenstück, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, um die x -Achse rotiert.

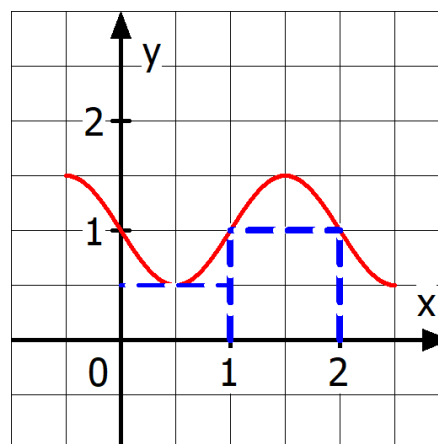
Interpretation des Terms $\pi \cdot 0,5^2$:

Rotiert das linke Rechteck im Intervall $[0;1]$ um die x -Achse, entsteht ein Zylinder mit dem Volumen $V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0,5^2 \cdot 1 = \pi \cdot 0,5^2$

Interpretation des Terms $\pi \cdot 1^2$:

Rotiert das rechte Rechteck im Intervall $[1;2]$ um die x -Achse, entsteht ein Zylinder mit dem Volumen $V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi \cdot 1^2$

Aus der Abbildung ergibt sich, dass die Summe der Zylindervolumen kleiner ist als das oben beschriebene Volumen V^* .

**Aufgabe 4:**

a) Aus der Geradengleichung kann aus den Zeilen entnommen werden:

$$x_1 = t \text{ und } x_2 = 1 \text{ und } x_3 = 1 - t$$

$$\text{Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt: } t + 1 + (1 - t) = 2$$

Daraus ergibt sich die wahre Aussage $2 = 2$.

Damit liegt g in der Ebene E .

- b) Zunächst wird geprüft, ob die Richtungsvektoren für einen bestimmten Wert von a Vielfache sein können:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der 1. Zeile ergibt sich $k = 1$.

Aus der 3. Zeile ergibt sich $0 = -1$, also ein Widerspruch.

Somit sind die Richtungsvektoren für jeden Wert von a keine Vielfache zueinander.

Gleichsetzen der Geradengleichungen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Zeile: } 1 = 1 - t \Leftrightarrow t = 0$$

$$1. \text{ Zeile: } s = t \Rightarrow s = 0$$

$$2. \text{ Zeile: } s \cdot a = 1 \Rightarrow 0 \cdot a = 1 \text{ ergibt einen Widerspruch}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, daher sind die Geraden für jeden Wert von a windschief.

Aufgabe 5:

- a) Die Geraden können nicht identisch sein, da ihre Richtungsvektoren keine Vielfachen zueinander sind.
- b) Da die Stützvektoren der Geraden identisch sind, schneiden sich die Geraden im Punkt $S(1|1|1)$.
Dieser Punkt muss auch auf der Spiegelebene liegen.

Es gibt zwei Möglichkeiten, den Normalenvektor der Ebene zu erhalten:

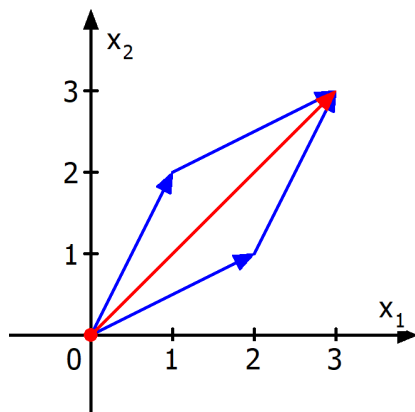
1. Möglichkeit:

Zunächst werden die beiden Richtungsvektoren skizziert, die in der $x_1 - x_2$ -Ebene liegen.

Der Normalenvektor von E halbiert den Winkel zwischen den Richtungsvektoren.

Die Richtungsvektoren besitzen dieselbe Länge, es gilt $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$.

Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Ansatz für die Ebenengleichung: $x_1 + x_2 = d$

Einsetzen von $S(1|1|1)$ ergibt $d = 2$.

Die Gleichung der Ebene lautet $x_1 + x_2 = 2$

2.Möglichkeit:

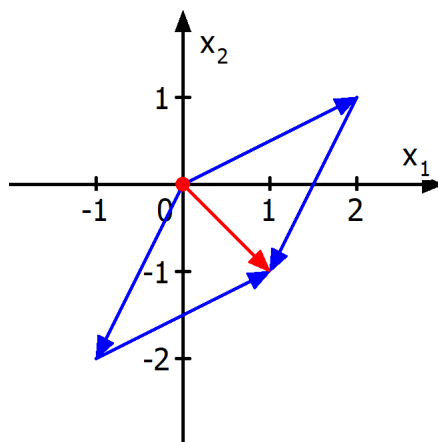
Zunächst werden die beiden Richtungsvektoren skizziert, die in der $x_1 - x_2$ -Ebene

liegen, wobei der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch den Gegenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ersetzt wird.

Der Normalenvektor von E halbiert den Winkel zwischen den Richtungsvektoren.

Die Richtungsvektoren besitzen dieselbe Länge, es gilt $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$.

Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Ansatz für die Ebenengleichung: $x_1 - x_2 = d$

Einsetzen von $S(1|1|1)$ ergibt $d = 0$.

Die Gleichung der Ebene lautet $x_1 - x_2 = 0$

Aufgabe 6:

- a) $\frac{3}{5}$ ist die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung von „2“.
 $\frac{2}{5}$ ist die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung von „a“.
 $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf den beiden Kugeln unterschiedliche Zahlen stehen.

- b) Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:

$$X = 2 \cdot 2 = 4 \text{ und } X = a \cdot a = a^2 \text{ und } X = 2 \cdot a.$$

$$P(X = 4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$P(X = a^2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(X = 2a) = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

$$E(X) = 4 \cdot \frac{9}{25} + a^2 \cdot \frac{4}{25} + 2a \cdot \frac{12}{25} = \frac{4}{25}a^2 + \frac{24}{25}a + \frac{36}{25}$$

$$\text{Bedingung: } \frac{4}{25}a^2 + \frac{24}{25}a + \frac{36}{25} = 4 \quad | \cdot 25$$

$$4a^2 + 24a + 36 = 100 \quad | : 4$$

$$a^2 + 6a + 9 = 25 \Leftrightarrow a^2 + 6a - 16 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$\text{Es gilt } a_1 = -8 \text{ und } a_2 = 2.$$

Da a negativ ist, gilt $a = -8$.