Analysis

Exponentialfunktionen: komplettes Stoffgebiet
Wahlteilaufgaben

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Berufliche Gymnasien: ab Klasse 12

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2e^x - e^{2x}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist die Kurve K.

a) Untersuche K auf Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K für $-4 \le x \le 1$.

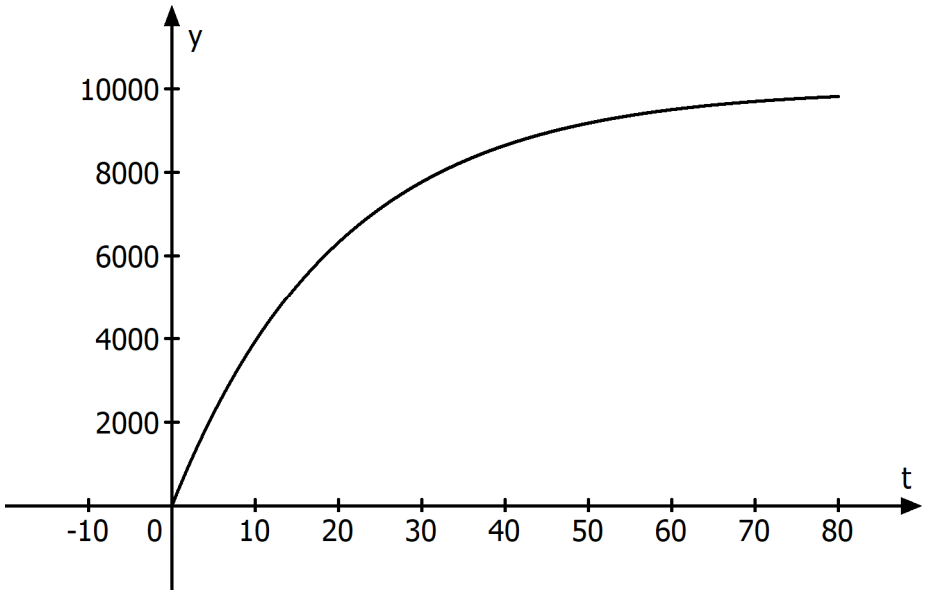
b) Die x-Achse, die y-Achse, die Kurve K und die Gerade mit der Gleichung x = u mit u < 0 schließen eine Fläche ein. Berechne deren Inhalt A(u) und den Grenzwert des Flächeninhalts für $u \to -\infty$.

c) Gegeben ist die Funktion $g(x) = 2e^x$. Ihr Schaubild ist die Kurve C. Zeichne C in das Schaubild von Teilaufgabe a) ein. Die Gerade x = u mit u < 0 schneidet dir Kurve K im Punkt P und die Kurve C im Punkt Q. Der Ursprung O sowie die Punkte P und Q bilden ein Dreieck. Berechne den Inhalt des Dreiecks OPQ in Abhängigkeit von u.
Bestimme u so, dass der Inhalt des Dreiecks maximal wird – eine Randwertuntersuchung ist nicht erforderlich.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f(t) = 10000 - 10000e^{-0,05t}$ mit $t \ge 0$.

Ihr Schaubild ist unten abgebildet.



a) Zeige: f ist streng monoton steigend und besitzt keine Wendestelle.
Gib die Gleichung der Asymptote von K an.

b) Berechne den Inhalt der ins Unendlich reichenden Fläche, die von K, der Asymptote und der y-Achse begrenzt wird.

c) Die Funktion f beschreibt die Anzahl der insgesamt verkauften Stücke eines neuen Produktes nach t Wochen. Wie ist der Absatz in der 20.Woche? In welcher Woche liegt der Absatz erstmals unter 30 Stück?
Nach wie vielen Wochen sind bereits 90% der produzierten 10000 Stück verkauft?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Die Funktion $f(x) = 2e^x - e^{2x}$ besitzt eine Asymptote für $x \to -\infty$.
Da $2e^x - e^{2x} \to 0$ strebt für $x \to -\infty$, lautet die Gleichung der waagrechten Asymptote y = 0.

Schnittpunkt mit der y-Achse:
$f(0) = 2e^0 - e^0 = 1$, also $S_y(0 / 1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$
$2e^x - e^{2x} = 0 \Rightarrow e^x \cdot (2 - e^x) = 0$ Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $2 - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln(2)$

Es gibt einen Schnittpunkt $N(\ln(2) / 0)$.

Ableitungen:
$f'(x) = 2e^x - 2e^{2x}$
$f''(x) = 2e^x - 4e^{2x}$
$f'''(x) = 2e^x - 8e^{2x}$

Extrempunkte:
Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$2e^x - 2e^{2x} = 0 \Rightarrow 2e^x \cdot (1 - e^x) = 0$ Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $2e^x = 0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $1 - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$

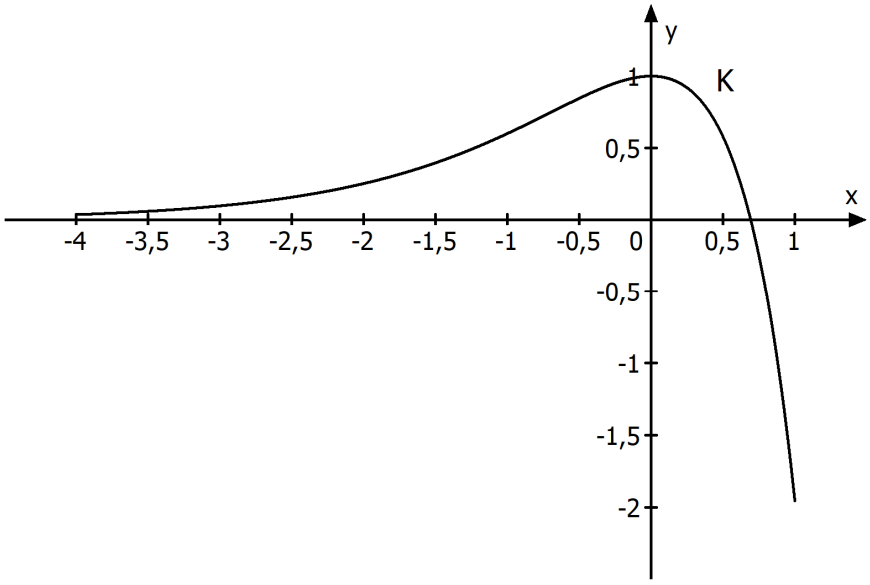
$f''(0) = -2 < 0$, also Hochpunkt $H(0 / f(0)) \to H(0 / 1)$

Wendepunkte:
Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$2e^x - 4e^{2x} = 0 \Rightarrow 2e^x \cdot (1 - 2e^x) = 0$ Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $2e^x = 0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $1 - 2e^x = 0 \Rightarrow x = \ln(0,5)$

$f'''(\ln(0,5)) = -1 \neq 0$, also Wendepunkt $W(\ln(0,5) / f(\ln(0,5)) \to W(\ln(0,5) / 0,75)$

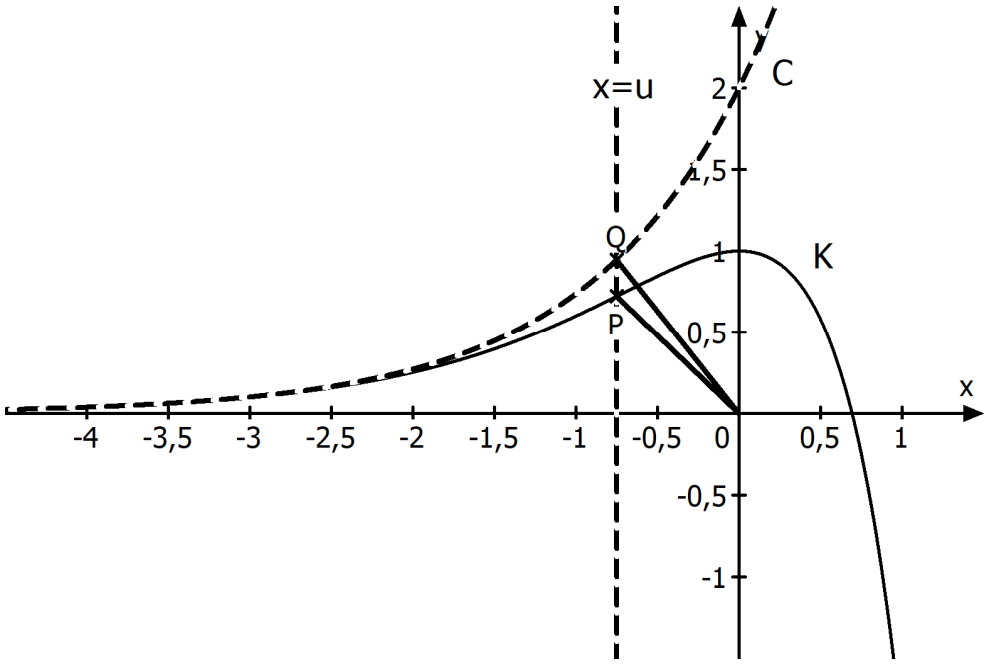


b) Berechnung des Flächeninhalts:

$$A(z)=\int_z^0 (2e^x-e^{2x})dx=\left[2e^x-0,5e^{2x}\right]_z^0=1,5-(2e^z-0,5e^{2z})=1,5-2e^z+0,5e^{2z}$$

Für $z\to-\infty$ gilt $A(z)\to 1,5$ da $-2e^z+0,5e^{2z}\to 0$ strebt

c) Skizze der Kurve C und des Dreiecks OPQ:



Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks:
O(0/0), P(u/f(u) und Q(u/g(u))

$$A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot h_{Dreieck} \quad \text{mit } \overline{PQ}=g(u)-f(u) \text{ und } h_{Dreieck}=-u$$

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \left(2e^{u} - (2e^{u} - e^{2u})\right) \cdot (-u) = -\frac{1}{2} u \cdot e^{2u}$ mit u < 0

Es gilt:

$A'(u) = -\frac{1}{2} e^{2u} - \frac{1}{2} u \cdot 2e^{2u} = e^{2u} \cdot (-\frac{1}{2} - u)$

Relatives Maximum von A(u):
Hinreichende Bedingung: $A'(u) = 0$ und VZW von $A'(u)$ von + nach -

$e^{2u} \cdot (-\frac{1}{2} - u) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^{2u} = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $-\frac{1}{2} - u = 0 \Rightarrow u = -0,5$

Kontrolle des VZW:
$A'(-1) > 0$ und $A'(0) < 0$ also VZW von + nach -

Für u = -0,5 existiert ein relatives Maximum.

Aufgabe 2:

a) Nachweis, dass f streng monoton steigend ist: $f'(t) > 0$

$f'(t) = -10000 \cdot (-0,05) \cdot e^{-0,05t} = 500 \cdot e^{-0,05t} > 0$, da $e^{-0,05t} > 0$ ist
Damit ist f streng monoton wachsend.

Es gilt
$f''(t) = 500 \cdot (-0,05) \cdot e^{-0,05t} = -25 \cdot e^{-0,05t}$

Wendestelle:
Notwendige Bedingung: $f''(t) = 0$

$-25 \cdot e^{-0,05t} = 0 \Rightarrow e^{-0,05t} = 0$ ist nicht lösbar

Damit existiert keine Wendestelle.

Gleichung der Asymptote:
Für $t \to \infty$ strebt $f(t) \to 10000$

Damit ist y = 10000 die Gleichung der waagrechten Asymptote.

b) Fläche zwischen der Asymptote und dem Schaubild K:

$$A(u) = \int_0^u (10000 - (10000 - 10000e^{-0,05t}))dt = \int_0^u 10000e^{-0,05t}dt$$
$$= \left[10000 \cdot \frac{1}{-0,05} e^{-0,05t} \right]_0^u = -200000e^{-0,05u} + 200000$$

Für $u \to +\infty$ gilt $A(u) \to 200000$

c) Absatz in der 20.Woche:

$f(20) = 10000 - 10000 \cdot e^{-0,05 \cdot 20} \approx 6321$
$f(21) \approx 6501$

In der 20.Woche werden 6501 – 6321 = 180 Stück verkauft.

Woche, bei der der Absatz erstmals unter 30 Stück liegt: $f'(t) < 30$

$500e^{-0,05t} < 30 \Rightarrow e^{-0,05t} < 0,06$
$\Rightarrow -0,05t < \ln(0,06) \Rightarrow t > \frac{\ln(0,06)}{-0,05} \approx 56,3$

Nach 57 Wochen liegt der Absatz erstmals unter 30 Stück.

Anzahl der Wochen, wenn 90% von 10000 verkauft sind: $f(t) = 9000$

$10000 - 10000e^{-0,05t} = 9000$
$\Rightarrow e^{-0,05t} = 0,1 \Rightarrow -0,05t = \ln(0,1) \Rightarrow t \approx 46$

Nach ca. 46 Wochen sind 90% der produzierten 10000 Stück verkauft.