

Analysis

Exponentialfunktionen (zum gesamten Stoffgebiet)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Aufgaben ohne Hilfsmittel**Aufgabe 1:**

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

a) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

b) $e^{x+1} + e^x = 1$

Aufgabe 2:

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ wird um zwei Einheiten in x -Richtung nach rechts verschoben, anschließend an der x -Achse gespiegelt und dann in y -Richtung um 3 Einheiten nach oben verschoben.

Gib einen Funktionsterm für das entstehende Schaubild an.

Aufgabe 3:

Berechne die erste Ableitungsfunktion:

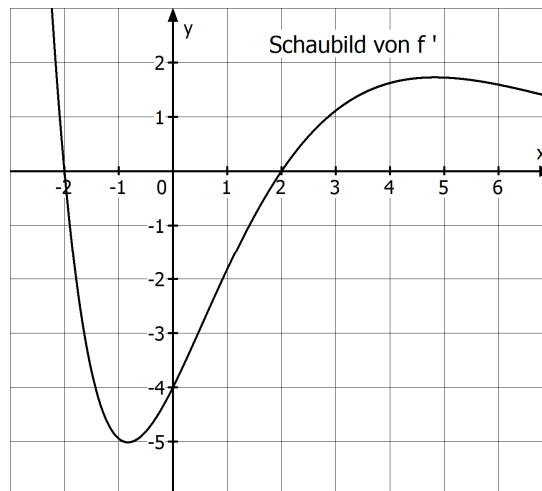
a) $f(x) = x \cdot e^{3x-4}$

b) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin(x)$

c) $f(x) = (e^{2x} - 1)^2$

Aufgabe 4:Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x} + 2$

- Wie lautet die Gleichung der waagrechten Asymptote des Schaubildes?
- Skizziere das Schaubild von f . Berechne den Inhalt der Fläche, die durch das Schaubild von f , der waagrechten Asymptote, der y -Achse und der Geraden $x = 3$ begrenzt wird.

Aufgabe 5:Von einer Funktion f ist der Graph seiner Ableitungsfunktion f' gegeben.

Untersuche die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

- Der Graph von f hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.
- Der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt.
- Für $2 < x < 6$ ist f streng monoton wachsend.
- Der Graph von f hat im Intervall $-2 < x < 6$ genau zwei Wendestellen.

Aufgaben mit Hilfsmittel (Taschenrechner und Merkhilfe)**Aufgabe 6:**

Die Höhe einer Pflanze (in Metern) zur Zeit t (in Wochen seit dem Beginn der Beobachtung) soll zunächst durch eine Funktion h_1 mit $h_1(t) = 0,02 \cdot e^{kt}$ näherungsweise beschrieben werden.

- a) Wie hoch ist die Pflanze zu Beginn der Beobachtung? Bestimme k , wenn die Höhe der Pflanze in den ersten 6 Wochen der Beobachtung um 0,48 Meter zugenommen hat. Wie hoch müsste die Pflanze 8 Wochen nach dem Beginn der Beobachtung sein?

Die Pflanze ist nach 8 Wochen tatsächlich nur 1,04 Meter hoch. Die Höhe wird deshalb für $t \geq 6$ beschrieben und durch die Funktion h_2 mit $h_2(t) = a - b \cdot e^{-0,536t}$.

- b) Bestimme a und b aus den beobachteten Höhen nach 6 und nach 8 Wochen. Bestimme die waagrechte Asymptote der Funktion $h_2(t)$. Welche Bedeutung hat dieser Wert für die Pflanze?

Aufgabe 7:

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = e - e^{tx}$; $x \in \mathbb{R}$
das Schaubild sei K_t .

Bestimme die Gleichungen der Tangente und der Normalen von K_t im Schnittpunkt von K_t mit der y -Achse.

Berechne die Schnittpunkte A und B der Tangente und der Normale mit der x -Achse.

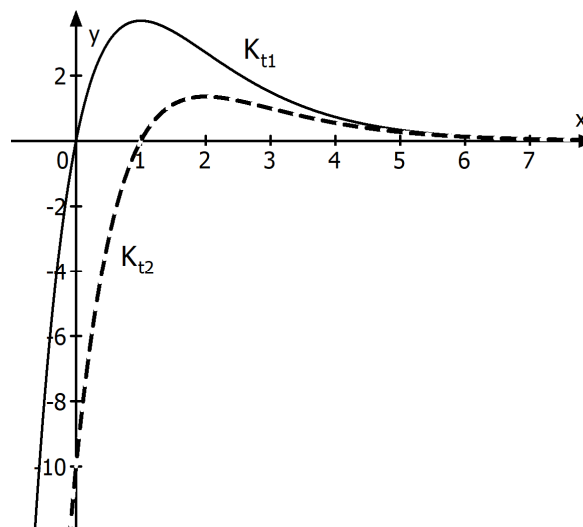
Aufgabe 8:

Zu jedem Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben mit der Gleichung

$$f_t(x) = 10 \cdot (x - t) \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Zwei Kurven der Schar sind in folgender Abbildung dargestellt.

- a) Bestimme die zugehörigen Parameter der Schaubilder.



- b) Die beiden Schaubilder in der Abbildung schließen zusammen mit der y -Achse eine nach rechts unbeschränkte Fläche ein. Zeige, dass der Inhalt dieser Fläche endlich ist.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

Substitution: $u = e^x$

$$u^2 - 4u + 3 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow u_1 = 3 \text{ und } u_2 = 1$$

Rücksubstitution: $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$

b) $e^{x+1} + e^x = 1 \Leftrightarrow e^x \cdot e + e^x = 1 \Leftrightarrow e^x \cdot (e + 1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{1+e} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{1+e}$

Aufgabe 2:Ausgangsfunktion: $f(x) = e^x$ Verschiebung um 2 nach rechts: $g(x) = e^{x-2}$ Spiegelung an der x-Achse: $h(x) = -e^{x-2}$ Verschiebung um 3 nach oben: $k(x) = -e^{x-2} + 3$ **Aufgabe 3:**

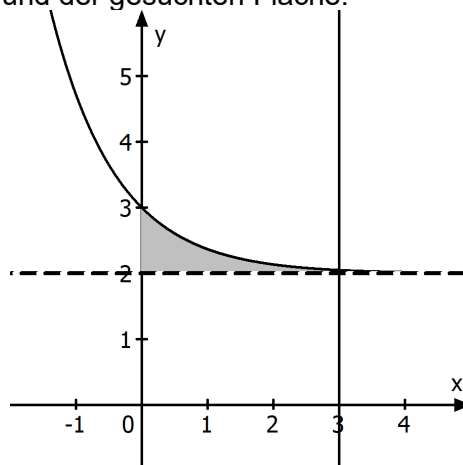
a) $f(x) = x \cdot e^{3x-4} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{3x-4} + x \cdot e^{3x-4} \cdot 3 = e^{3x-4} \cdot (1 + 3x)$
(Produkt- und Kettenregel)

b) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin(x) \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin(x) + e^{2x} \cdot \cos(x) = e^{2x} \cdot (2\sin(x) + \cos(x))$
(Produkt- und Kettenregel)

c) $f(x) = (e^{2x} - 1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (e^{2x} - 1)^1 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 4 \cdot e^{2x} \cdot (e^{2x} - 1)$ (Kettenregel)

Aufgabe 4:a) Für $x \rightarrow \infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow 0$; folglich strebt $f(x) \rightarrow 2$ Die waagrechte Asymptote ist $y = 2$ für $x \rightarrow \infty$

b) Skizze des Schaubildes und der gesuchten Fläche:



$$A = \int_0^3 (f(x) - 2) dx = \int_0^3 (e^{-x} + 2 - 2) dx = \int_0^3 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^3 = -e^{-3} + 1$$

Aufgabe 5:

- a) Die Aussage ist richtig. An der Stelle $x = -2$ besitzt die Ableitungsfunktion eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, also Hochpunkt von f .
- b) Die Aussage ist richtig. An der Stelle $x = 2$ besitzt die Ableitungsfunktion eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, also Tiefpunkt von f .
- c) Für $x > 2$ gilt $f'(x) > 0$ und daraus folgt, dass f für $x > 2$ streng monoton wächst. Die Aussage ist richtig.
- d) Diese Aussage ist richtig, da das Schaubild der Ableitungsfunktion zwei Extremstellen besitzt. Diese Extremstellen von $f'(x)$ sind die Wendestellen des Schaubildes von $f(x)$.

Aufgabe 6:

- a) Höhe der Pflanze zu Beginn: $h_1(0) = 0,02$ Meter

Berechnung von k :

$$\text{Es gilt } h_1(6) = 0,5 \Rightarrow 0,02 \cdot e^{6k} = 0,5 \Rightarrow e^{6k} = 25 \Rightarrow k \approx 0,536$$

Die Funktionsgleichung lautet $h_1(t) = 0,02 \cdot e^{0,536t}$

Höhe der Pflanze nach 8 Wochen: $h_1(8) = 1,46$ Meter

- b) Für die Funktion $h_2(t) = a - b \cdot e^{-0,536t}$ gilt

$$h_2(6) = 0,5 \Rightarrow a - b \cdot e^{-0,536 \cdot 6} = 0,5 \Rightarrow a - 0,04b = 0,5 \quad (*)$$

$$h_2(8) = 1,04 \Rightarrow a - b \cdot e^{-0,536 \cdot 8} = 1,04 \Rightarrow a - 0,0137b = 1,04 \quad (**)$$

Aus (*) folgt $a = 0,5 + 0,04b$

Eingesetzt in (**): $0,5 + 0,04b - 0,0137 \cdot b = 1,04 \Rightarrow 0,0263b = 0,54 \Rightarrow b \approx 20,5$

Dann gilt: $a = 0,5 + 0,04 \cdot 20,5 \approx 1,32$

Die Funktion lautet $h_2(t) = 1,32 - 20,5 \cdot e^{-0,536t}$

Waagrechte Asymptote: Für $t \rightarrow \infty$ strebt $h(t) \rightarrow 1,32$.

Gleichung der waagrechten Asymptote: $y = 1,32$

Bedeutung: Langfristig nähert sich die Höhe der Pflanze dem Wert 1,32 Meter. Die Pflanze wird maximal 1,32 Meter hoch.

Aufgabe 7:

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_t(0) = e - e^0 = e - 1$, also $S_y(0/e - 1)$.

Es gilt $f'_t(x) = -t \cdot e^{tx}$.

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Die Berührstelle der Tangente ist $u = 0$: $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

Es ist $f'_t(0) = -t$

Die Tangentengleichung lautet $y = -t \cdot (x - 0) + e - 1 \Rightarrow y = -tx + e - 1$

Allgemeine Normalengleichung an der Stelle $u = 0$: $y = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) + f(0)$

Die Normalengleichung lautet $y = -\frac{1}{-t} \cdot (x - 0) + e - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{t}x + e - 1$

Für die Berechnung der Strecke der x-Achse werden die Schnittstellen der Tangente und der Normale mit der x-Achse benötigt.

Schnittpunkt A der Tangente mit der x-Achse: $-tx + e - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{e - 1}{t}$

Schnittpunkt A($\frac{e - 1}{t}$ / 0)

Schnittpunkt B der Normalen mit der x-Achse: $\frac{1}{t} \cdot x + e - 1 = 0 \Rightarrow x = t \cdot (1 - e)$

Schnittpunkt B($t \cdot (1 - e)$ / 0)

Aufgabe 8:

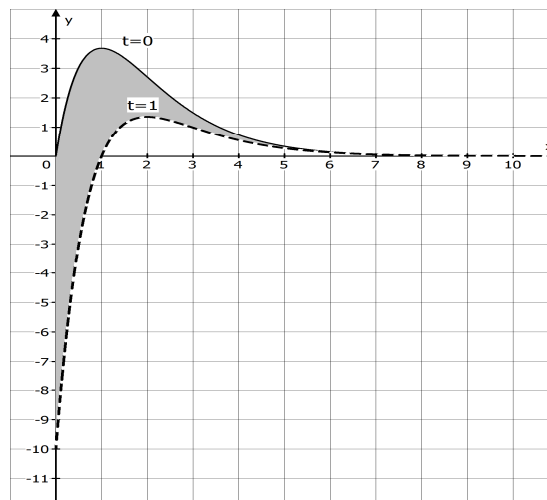
a) Das Schaubild K_{t1} verläuft durch den Punkt A(0/0).

$$f_t(0) = 0 \Rightarrow 10 \cdot (-t) \cdot e^0 = 0 \Rightarrow t = 0$$

Das Schaubild K_{t2} verläuft durch den Punkt B(1/0).

$$f_t(1) = 0 \Rightarrow 10 \cdot (1 - t) \cdot e^{-1} = 0 \Rightarrow t = 1$$

b) Skizze der gesuchten Fläche:



$$\begin{aligned} A(z) &= \int_0^z (f_0(x) - f_1(x)) dx = \int_0^z (10xe^{-x} - 10(x-1)e^{-x}) dx \\ &= \int_0^z (10xe^{-x} - 10xe^{-x} + 10e^{-x}) dx = \int_0^z 10e^{-x} dx = \left[-10e^{-x} \right]_0^z \\ &= -10e^{-z} + 10 \end{aligned}$$

Für $z \rightarrow \infty$ strebt $A(z) \rightarrow 10$

Damit ist gezeigt, dass der Flächeninhalt unabhängig von t und endlich ist.