

Analysis

Aufstellen ganzrationaler Funktionen (Steckbriefaufgaben)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Bestimme jeweils den Funktionsterm.

- a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(0/3)$ und einen Wendepunkt bei $W(1/5)$.
- b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung und hat an der Nullstelle $x = -3$ die Steigung 6.
- c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Er schneidet die y-Achse bei 2 und hat einen Tiefpunkt bei $T(2/-6)$.
- d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat im Ursprung eine Wendetangente mit der Steigung 1 und im Punkt $P(2/4)$ die Steigung 0.

Aufgabe 2:

Eine zum Ursprung symmetrische ganzrationale Funktion 5. Grades hat im Ursprung die Tangente mit der Gleichung $y = 7x$ und in $P(1/0)$ einen Wendepunkt. Wie lautet ihr Funktionsterm?

Aufgabe 3:

Wie lautet die ganzrationale Funktion 3. Grades, die die x-Achse im Ursprung berührt und deren Tangente in $P(-3/0)$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 6x$ ist?

Aufgabe 4:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat in $P(1/4)$ eine Tangente parallel zur x-Achse und in $Q(0/2)$ ihren Wendepunkt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 5:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat in $P(1/4)$ eine Tangente parallel zur 1. Winkelhalbierenden und in $Q(0/2)$ eine Tangente parallel zur x-Achse. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 6:

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch $O(0/0)$ und hat in $H(2/4)$ einen Punkt mit waagrechter Tangente. Bei $x = 1$ existiert eine Wendestelle. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 7:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades durch $P(0/-5)$ und $Q(1/0)$ berührt die x-Achse in $R(5/0)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 8:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades geht durch $O(0/0)$ und hat ihren Wendepunkt in $W(1/-2)$. Die Wendetangente schneidet die x-Achse in $Q(2/0)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Ansatz für Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Es gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(1) = 5 \Rightarrow a + b + c + d = 5 \quad (*)$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad (**)$

Aus (*) und (**) folgt unter Berücksichtigung von $d = 3$ und $c = 0$:

$$a + b = 2$$

$$6a + 2b = 0$$

Aus der 1. Zeile folgt: $b = 2 - a$

Eingesetzt in die 2. Zeile: $6a + 2(2 - a) = 0 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$

$$b = 2 - (-1) = 3$$

Funktionsgleichung: $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 3$

b) Ansatz für Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Es gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(-3) = 0 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 0 \quad (*)$

$f'(-3) = 6 \Rightarrow 27a - 6b + c = 6 \quad (**)$

Aus (*) und (**) folgt unter Berücksichtigung von $d = 0$ und $c = 0$:

$$-27a + 9b = 0$$

$$27a - 6b = 6$$

Aus 1. Zeile folgt: $9b = 27a \Rightarrow b = 3a$

Eingesetzt in die 2. Zeile: $27a - 6 \cdot 3a = 6 \Rightarrow 9a = 6 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$$b = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

c) Ansatz für Funktionsgleichung: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$$\text{Es gilt } f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$\text{Bedingungen: } f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(2) = -6 \Rightarrow 16a + 4b + c = -6 \quad (*)$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 4b = 0 \quad (**)$$

Aus (*) und (**) folgt unter Berücksichtigung von $c = 2$:

$$16a + 4b = -8$$

$$32a + 4b = 0$$

$$\text{Aus 2. Zeile folgt: } 4b = -32a \Rightarrow b = -8a$$

$$\text{Eingesetzt in die 1. Zeile: } 16a + 4 \cdot (-8a) = -8 \Rightarrow -16a = -8 \Rightarrow a = 0,5$$

$$b = -8 \cdot 0,5 = -4$$

$$\text{Funktionsgleichung: } f(x) = 0,5x^4 - 4x^2 + 2$$

d) Ansatz für Funktionsgleichung: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$\text{Es gilt } f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \text{ und } f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$\text{Bedingungen: } f(0) = 0 \Rightarrow e = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow d = 1$$

$$f(2) = 4 \Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 4 \quad (*)$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 12b + 4c + d = 0 \quad (**)$$

Aus (*) und (**) folgt unter Berücksichtigung von $e = 0$, $d = 1$ und $c = 0$:

$$16a + 8b = 2$$

$$32a + 12b = -1$$

$$\text{Aus 1. Zeile folgt: } 8b = 2 - 16a \Rightarrow b = 0,25 - 2a$$

$$\text{Eingesetzt in die 2. Zeile: } 32a + 12 \cdot (0,25 - 2a) = -1 \Rightarrow 8a = -4 \Rightarrow a = -0,5$$

$$b = 0,25 - 2 \cdot (-0,5) = 1,25$$

$$\text{Funktionsgleichung: } f(x) = -0,5x^4 + 1,25x^3 + x$$

Aufgabe 2:

Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen wegen Symmetrie zu $O(0/0)$).

Dann gilt $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$ und $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$

Bedingungen:

Steigung $m = 7$ im Ursprung: $f'(0) = 7 \Rightarrow c = 7$

$P(1/0)$ liegt auf dem Schaubild: $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -7$ (*)

$x = 1$ ist eine Wendestelle: $f''(1) = 0 \Rightarrow 20a + 6b = 0$ (**)

Lösung des Gleichungssystems (*) und (**):

$$\begin{array}{rcl} a & +b & = -7 \\ 20a & +6b & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-6) \\ \hline \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a & +b & = -7 \\ 14a & & = 42 \end{array}$$

Aus 2. Zeile: $a = 3$

Aus 1. Zeile: $b = -10$

Funktionsgleichung: $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7x$

Aufgabe 3:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Dann gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

Berührung im Ursprung: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$P(-3/0)$ liegt auf dem Schaubild: $f(-3) = 0 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 0 \Rightarrow -27a + 9b = 0$ (*)

Tangente bei $x = -3$ hat Steigung $m = 6$: $f'(-3) = 6 \Rightarrow 27a - 6b + c = 0 \Rightarrow 27a - 6b = 6$ (**)

Lösung des Gleichungssystems (*) und (**):

$$\begin{array}{rcl} -27a & +9b & = 0 \\ 27a & -6b & = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} -27a & +9b & = 0 \\ & 3b & = 6 \end{array}$$

Aus 2. Zeile: $b = 2$

Aus 1. Zeile: $a = \frac{2}{3}$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

Aufgabe 4:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Dann gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen:

P(1/4) liegt auf dem Schaubild: $f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c + d = 4$ (*)

Steigung bei $x = 1$ ist $m = 0$: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ (**)

Q(0/2) liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$

Wendestelle bei $x = 0$: $f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Lösung des Gleichungssystems (*) und (**):

$$\begin{array}{rcl} a + c & = & 2 \\ 3a + c & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ \hline \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a + c & = & 2 \\ 2a & = & -2 \end{array}$$

Aus 2. Zeile: $a = -1$

Aus 1. Zeile: $c = 3$

Funktionsgleichung: $f(x) = -x^3 + 3x + 2$

Aufgabe 5:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Dann gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Hinweis: Die 1. Winkelhalbierende $y = x$ hat die Steigung 1

Bedingungen:

P(1/4) liegt auf dem Schaubild: $f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c + d = 4$ (*)

Steigung bei $x = 1$ ist $m = 1$: $f'(1) = 1 \Rightarrow 3a + 2b + c = 1$ (**)

Q(0/2) liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$

Bei $x = 0$ ist die Steigung $m = 0$: $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Lösung des Gleichungssystems (*) und (**):

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 2 \\ 3a + 2b & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \hline \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a + b & = & 2 \\ a & = & -3 \end{array}$$

Aus 2. Zeile: $a = -3$

Aus 1. Zeile: $b = 5$

Funktionsgleichung: $f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 2$

Aufgabe 6:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Dann gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen:

O(0/0) liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

H(2/4) liegt auf dem Schaubild: $f(2) = 4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 4$ (*)

Steigung bei $x = 2$ ist $m = 0$: $f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$ (**)

Wendestelle bei $x = 1$: $f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ (***)

Lösung des Gleichungssystems (*) und (**) und (***)

$$\begin{array}{rclcl} 8a & +4b & +2c & = & 4 \\ 12a & +4b & +c & = & 0 \quad | \cdot (-2) \\ 6a & +2b & & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{rclcl} 8a & +4b & +2c & = & 4 \\ -16a & -4b & & = & 4 \\ 6a & +2b & & = & 0 \quad | \cdot 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 8a & +4b & +2c & = & 4 \\ -16a & -4b & & = & 4 \\ -4a & & & = & 4 \end{array}$$

Aus 3. Zeile: $a = -1$

Aus 2. Zeile: $b = 3$

Aus 1. Zeile: $c = 0$

Funktionsgleichung: $f(x) = -x^3 + 3x^2$

Aufgabe 7:

Aufgrund der Vorgaben gibt es hier zwei Lösungsvarianten:

Variante 1:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Dann gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

P(0/-5) liegt auf dem Schaubild: $f(0) = -5 \Rightarrow d = -5$

Q(1/0) liegt auf dem Schaubild: $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b + c = 5$ (*)

R(5/0) liegt auf dem Schaubild: $f(5) = 0 \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = 0 \Rightarrow 125a + 25b + 5c = 5$ (**)

Bei $x = 5$ ist die Steigung $m = 0$: $f'(5) = 0 \Rightarrow 75a + 10b + c = 0$ (***)

Lösung des Gleichungssystems (*) und (**) und (***)

$$\begin{array}{rclcl} a & +b & +c & = & 5 \quad | \cdot (-25) \\ 25a & +5b & +c & = & 1 \\ 75a & +10b & +c & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 a & +b & +c & = & 5 \\
 -20b & -24c & = & -124 & | \cdot (-13) \\
 -65b & -74c & = & -375 & | \cdot 4
 \end{array}$$


$$\begin{array}{rclcl}
 a & +b & +c & = & 5 \\
 -20b & -24c & = & -124 \\
 & 16c & = & 112
 \end{array}$$

Aus 3. Zeile: $c = 7$

Aus 2. Zeile: $b = -2,2$

Aus 1. Zeile: $a = 0,2$

Funktionsgleichung $f(x) = 0,2x^3 - 2,2x^2 + 7x - 5$

Variante 2:

Da sämtliche Nullstellen der Funktion bekannt sind, kann diese auch in Produktform angesetzt werden:

$$f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 5)^2$$

(da bei $x = 5$ die x -Achse berührt wird, existiert dort eine doppelte Nullstelle)

Bedingung:

$$f(0) = -5 \Rightarrow a \cdot (-1) \cdot (0 - 5)^2 \Rightarrow a = 0,2$$

Funktionsgleichung: $f(x) = 0,2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5)^2$

Hinweis: Wenn man die Klammern ausmultipliziert, erhält man die Funktionsgleichung aus Variante 1.

Aufgabe 8:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Dann gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Von der Wendetangente sind die Punkte $W(1/-2)$ und $Q(2/0)$ bekannt.

Somit kann man ihre Steigung bestimmen: $m_{\text{Wendetangente}} = \frac{y_W - y_Q}{x_W - x_Q} = \frac{-2 - 0}{1 - 2} = 2$

Bedingungen:

$O(0/0)$ liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$W(1/-2)$ liegt auf dem Schaubild: $f(1) = -2 \Rightarrow a + b + c + d = -2 \Rightarrow a + b + c = -2$ (*)

Wendestelle bei $x = 1$: $f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ (**)

Bei $x = 1$ ist die Steigung $m = 2$: $f'(1) = 2 \Rightarrow 3a + 2b + c = 2$ (***)

Lösung des Gleichungssystems (*) und (**) und (***)

$$\begin{array}{rclcl}
 a & +b & +c & = & -2 & | \cdot (-6) & \xrightarrow{\quad} & | \cdot (-3) & \xrightarrow{\quad} \\
 6a & +2b & & = & 0 & & \swarrow & & \\
 3a & +2b & +c & = & 2 & & & \swarrow &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 a & +b & +c & = & -2 \\
 -4b & -6c & & = & 12 \\
 -b & -2c & = & 8 & | \cdot (-4) & \xrightarrow{\quad}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 a & +b & +c & = & -2 \\
 -4b & -6c & = & 12 \\
 & & 2c & = & -20
 \end{array}$$

Aus 3. Zeile: $c = -10$

Aus 2. Zeile: $b = 12$

Aus 1. Zeile: $a = -4$

Funktionsgleichung: $f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x$