

Analysis

Tangenten, Normalen, Änderungsraten Schaubilder von Ableitungsfunktionen

**Allg. Gymnasien: ab Klasse 10
Berufliche Gymnasien: ab Klasse 12
Berufskolleg: Aufgaben ohne *)**

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner

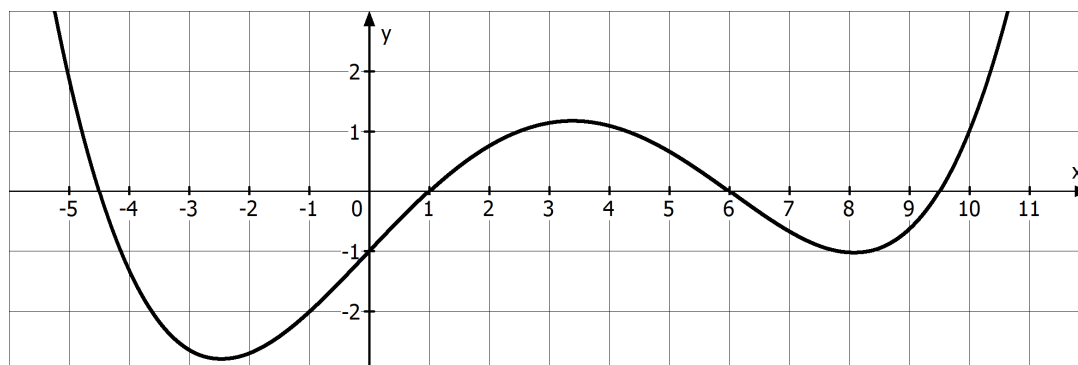
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juli 2018

Aufgabe 1:

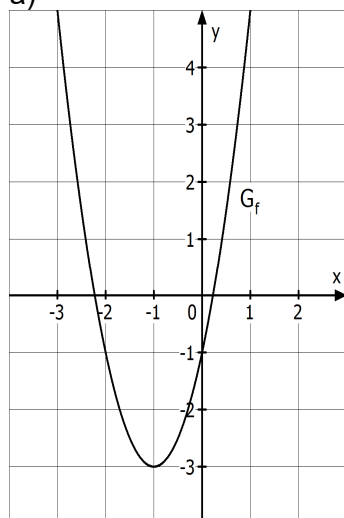
Skizziere den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f' .

**Aufgabe 2:**

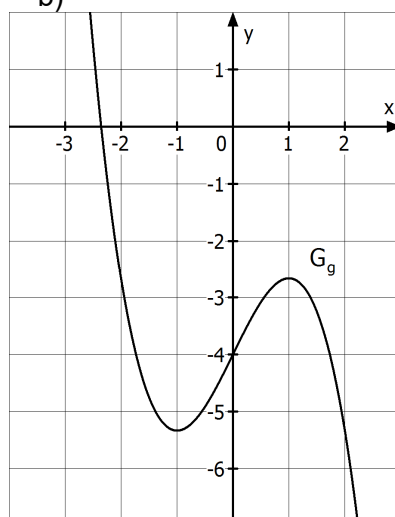
Gegeben sind die Graphen dreier Funktionen f , g , h sowie sechs weitere Graphen, darunter auch die Graphen der Ableitungsfunktionen dieser drei Funktionen.

Ordne den drei Funktionen jeweils ihre Ableitungsfunktion zu und begründe deine Entscheidung.

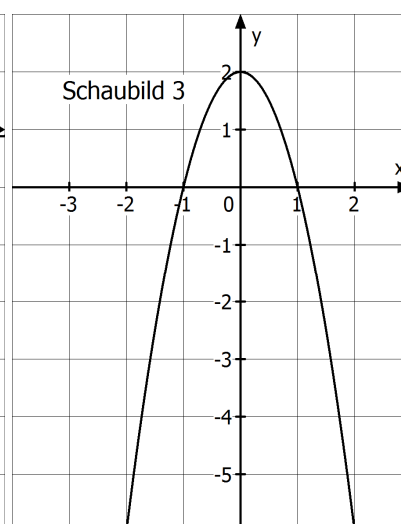
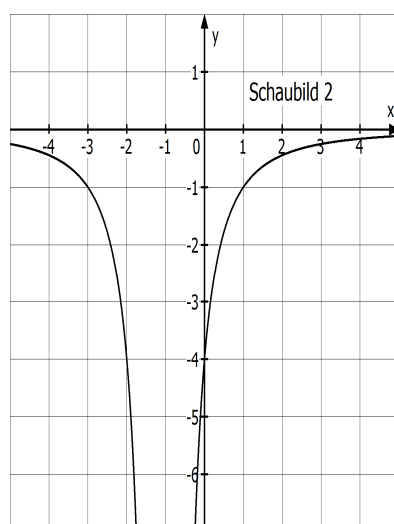
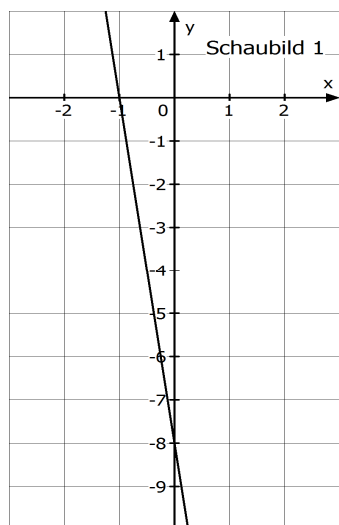
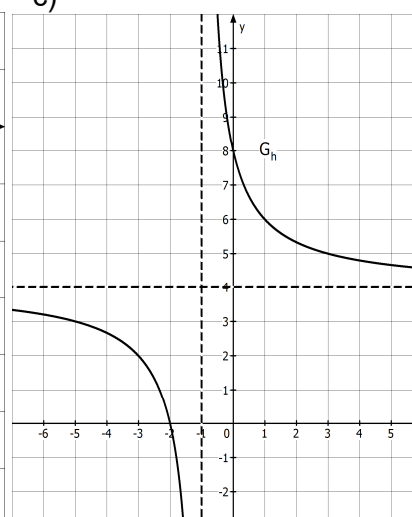
a)

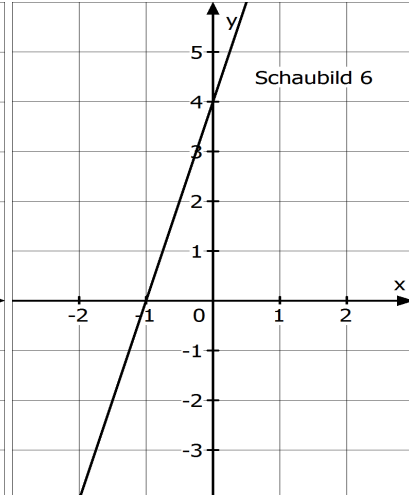
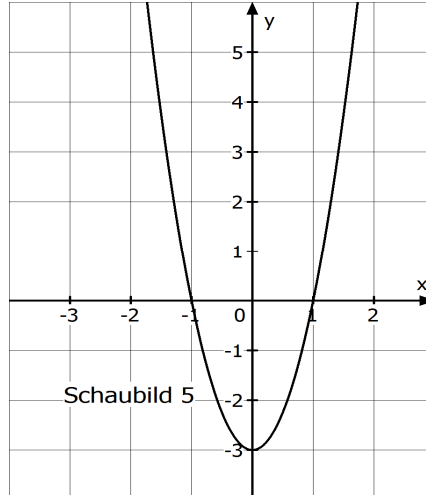
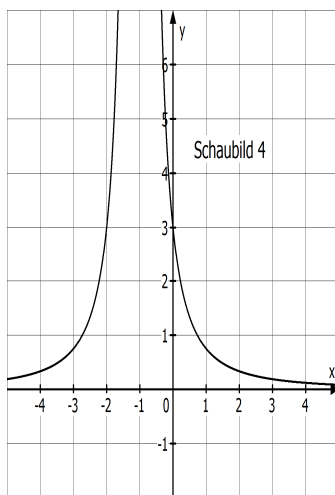


b)



c)



**Aufgabe 3:**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 1$.

- Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $B(6/f(6))$.
- Die Normale im Punkt $B(6/f(6))$ schneidet den Graphen von $f(x)$ in einem weiteren Punkt R . Gib seine Koordinaten an.
- Bestimme durch Rechnung einen Punkt Q des Graphen, in dem die Tangente parallel ist zur Geraden g mit der Gleichung $y = -8x + 5$.
Gib die Gleichung der Tangente an.

Aufgabe 4:

Ein Bestand werde im Intervall $0 \leq x \leq 5$ durch die Funktion $f(x) = -0,5x \cdot (x - 8)$ beschrieben.

- Zeichne das Schaubild der Funktion f .
- Bestimme die mittlere Änderungsrate im Intervall $0 \leq x \leq 5$.
- Bestimme die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $x = 3$ zeichnerisch und rechnerisch.
- In welchem Punkt beträgt die momentane Änderungsrate 2?

Aufgabe 5:

Ein Wachstumsprozess werde durch die Funktion $f(t) = 0,5t^2 - t + 1$, $t \geq 0$ beschrieben.

- Bestimme die mittlere Änderungsrate im Intervall $[1;5]$.
- Bestimme die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 2$.
- Bestimme die Gleichung der Tangente an das Schaubild im Punkt $P(3/f(3))$.

Aufgabe 6*:

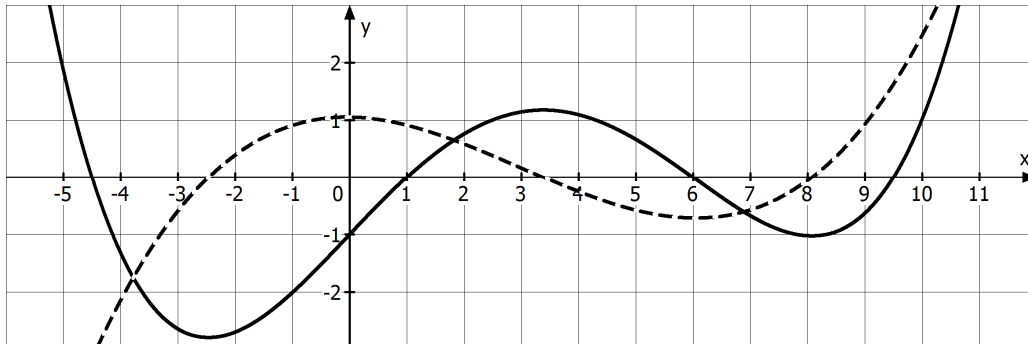
Bestimme die Tangentengleichung an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x - 2$, die die Steigung 2 besitzt.

Berechne den Inhalt des Dreiecks, das von dieser Tangente, der zugehörigen Normalen und der y-Achse begrenzt wird.

Lösungen

Aufgabe 1:

Die gestrichelte Linie ist das Schaubild der Ableitungsfunktion.



Aufgabe 2:

a) Schaubild von $f(x)$:

Die Parabel hat an der Stelle $x = -1$ ein lokales Minimum.

Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von - nach + besitzen muss.

Hier kommen nur die Schaubilder 3 und 6 in Frage.

Es ist jedoch **Schaubild 6**.

1. Argument: $f(x)$ ist eine Parabel (Funktion 2. Grades) und das Schaubild der Ableitungsfunktion ist daher eine Gerade

2. Argument: Da $f(x)$ bei $x = 1$ keinen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt, kann Schaubild 3 nicht die Ableitungsfunktion von $f(x)$ sein.

b) Schaubild von $g(x)$:

Das Schaubild hat bei $x = -1$ und $x = 1$ zwei Extremstellen.

Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel besitzen muss.

An der Stelle $x = -1$ ist es ein VZW von - nach +.

An der Stelle $x = 1$ ist es ein VZW von + nach -.

Die zugehörige Ableitungsfunktion ist in **Schaubild 3** zu sehen.

c) Schaubild von $h(x)$:

Das Schaubild besitzt keinen Punkt mit waagrechter Tangente und ist bei $x = -1$ unterbrochen.

Folglich besitzt die Ableitungsfunktion keine Nullstellen und ist ebenfalls bei $x = -1$ unterbrochen.

Hier kommen nur die Schaubilder 2 und 4 in Frage.

Da das Schaubild von $h(x)$ streng monoton fallend ist, befindet sich das Schaubild der Ableitungsfunktion komplett unter der x-Achse.

Die zugehörige Ableitungsfunktion ist in **Schaubild 2** zu sehen.

Aufgabe 3:

a) Es gilt $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 1$ und $f'(x) = \frac{4}{3}x - 4$

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + c$

Aus $f(6) = 1$ folgt, dass B(6/1) der Berührungspunkt ist.

Steigung der Tangente: $f'(6) = 4$

Einsetzen der Steigung und von B: $1 = 4 \cdot 6 + c \Rightarrow c = -23$

Tangentengleichung in B: $y = 4x - 23$

b) Zunächst muss die Gleichung der Normalen aufgestellt werden.

Ansatz für die Normalengleichung: $y = mx + c$

$$\text{Steigung der Normalen: } m = \frac{-1}{m_{\text{Tangente}}} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Einsetzen der Steigung und von B: } 1 = -\frac{1}{4} \cdot 6 + c \Rightarrow c = 2,5$$

$$\text{Normalengleichung in B: } y = -\frac{1}{4}x + 2,5$$

Schnittpunkt der Normale mit dem Schaubild von f:

$$\frac{2}{3}x^2 - 4x + 1 = -\frac{1}{4}x + 2,5 \Rightarrow \frac{2}{3}x^2 - 3,75x - 1,5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3,75 \pm \sqrt{3,75^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1,5)}}{\frac{4}{3}} = \frac{3,75 \pm 4,25}{\frac{4}{3}}$$

Es gilt $x_1 = 6$ (entspricht Punkt B) und $x_2 = -\frac{3}{8}$ (dies ist der x-Wert von Punkt R)

$$\text{Berechnung des y-Wertes von R: } f\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{83}{32}, \text{ also } R\left(-\frac{3}{8} / \frac{83}{32}\right)$$

c) Gesucht ist eine Tangente mit der Steigung $m = -8$:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x - 4 = -8 \Rightarrow x = -3$$

Berechnung des y-Wertes von Q: $f(-3) = 19$

Koordinaten von Q: $Q(-3/19)$

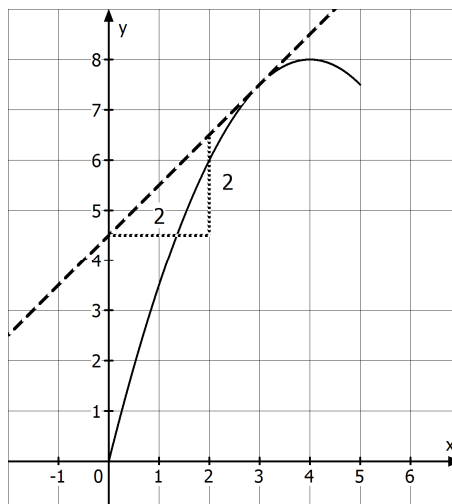
Ansatz für Tangentengleichung: $y = mx + c$

$$\text{Einsetzen der Steigung und von Q: } 19 = -8 \cdot (-3) + c \Rightarrow c = -5$$

$$\text{Tangentengleichung in Q: } y = -8x - 5$$

Aufgabe 4:

a)



b) Mittlere Änderungsrate im Intervall $0 \leq x \leq 5$: $\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{7,5 - 5}{5 - 0} = 1,5$

c) Momentane Änderungsrate bei $x = 3$ (zeichnerisch): $m_{\text{Tangente}} = \frac{2}{2} = 1$

Es ist $f(x) = -0,5x^2 + 4x$ mit der Ableitungsfunktion $f'(x) = -x + 4$

Momentane Änderungsrate bei $x = 3$ (rechnerisch): $f'(3) = 1$

d) Die momentane Änderungsrate ist 2, wenn gilt $f'(x) = 2$

$-x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = 2$

Mit $f(2) = 6$ lautet der gesuchte Punkt A(2|6).

Aufgabe 5:

Es ist $f(t) = 0,5t^2 - t + 1$ mit der Ableitungsfunktion $f'(t) = t - 1$

a) Mittlere Änderungsrate im Intervall $1 \leq t \leq 5$: $\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{8,5 - 0,5}{4} = 2$

b) Momentane Änderungsrate bei $t = 2$: $f'(2) = 1$

c) Ansatz für Tangentengleichung: $y = mx + c$

Aus $f(3) = 2,5$ folgt, dass B(3|2,5) der Berührungspunkt ist.

Steigung der Tangente: $f'(3) = 2$

Einsetzen der Steigung und von B: $2,5 = 2 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -3,5$

Tangentengleichung in B: $y = 2x - 3,5$

Aufgabe 6:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 2$ mit der Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x - 2$

Anhand der gegebenen Steigung kann die Berührstelle berechnet werden.

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 2$

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + c$

Aus $f(2) = -2$ folgt, dass B(2|-2) der Berührungspunkt ist.

Einsetzen der Steigung und von B: $-2 = 2 \cdot 2 + c \Rightarrow c = -6$

Die Tangentengleichung in B lautet $y = 2x - 6$

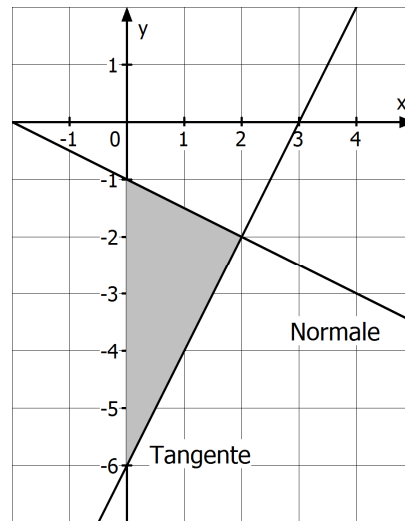
Gleichung der Normalen in B: $m = -\frac{1}{m_{\text{Tangente}}} = -\frac{1}{2}$

Ansatz für die Normalengleichung: $y = mx + c$

Einsetzen der Steigung und von B: $-2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + c \Rightarrow c = -1$

Die Normalengleichung in B lautet $y = -0,5x - 1$

Um die Dreiecksfläche zu berechnen, zeichnet man die Tangente und die Normale in ein Koordinatensystem ein:



$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5 \text{ Flächeneinheiten}$$