

Analysis

Waagrechte Asymptoten bei Exponentialfunktionen

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2018

Aufgabe 1:

Bestimme das Verhalten des Graphen von f für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ an.
Gib die Gleichung der waagrechten Asymptote an, sofern diese existiert.

a) $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$

b) $f(x) = 0,5 \cdot e^{-x}$

c) $f(x) = -4 \cdot e^{3x-10}$

d) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{0,5-2x}$

e) $f(x) = e^x - 4$

f) $f(x) = 5 + e^{-2x}$

g) $f(x) = 2 \cdot (1 - e^{x+2})$

h) $f(x) = -e - 5 \cdot e^{-3x-4}$

i) $f(x) = (3 - e^{2x})^2$

j) $f(x) = 2e^{2x} - e^x - 3$

k) $f(x) = 4e^{-x} - e^{-3x} + e^2$

l) $f(x) = 2e^{-x} + 3e^x$

Aufgabe 2:

Bestimme das Verhalten des Graphen von f für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ an.
Gib die Gleichung der waagrechten Asymptote an, sofern diese existiert.

a) $f(x) = x \cdot e^x$

b) $f(x) = 4 + x^2 \cdot e^{-2x}$

c) $f(x) = x^7 \cdot e^{-0,2x}$

d) $f(x) = \frac{e^x}{x^4 + 1}$

e) $f(x) = -x^2 \cdot e^{-x} + 3$

f) $f(x) = \frac{-1 - x^2}{e^x}$

g) $f(x) = 2e^x - 10x^3$

h) $f(x) = \frac{x - e^x}{x}$

i) $f(x) = \frac{x - e^x}{e^x}$

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{2x} \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{2x} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 0$.

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \rightarrow -\infty$.

b) $f(x) = 0,5 \cdot e^{-x}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 0$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \rightarrow +\infty$.

c) $f(x) = -4 \cdot e^{3x-10}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{3x-10} \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{3x-10} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 0$.

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \rightarrow -\infty$.

d) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{0,5-2x}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{0,5-2x} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 0$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{0,5-2x} \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \rightarrow +\infty$.

e) $f(x) = e^x - 4$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^x \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^x \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -4$.

Waagrechte Asymptote: $y = -4$ für $x \rightarrow -\infty$.

f) $f(x) = 5 + e^{-2x}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-2x} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 5$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{-2x} \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = 5$ für $x \rightarrow +\infty$.

g) $f(x) = 2 \cdot (1 - e^{x+2})$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{x+2} \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{x+2} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 2$.

Waagrechte Asymptote: $y = 2$ für $x \rightarrow -\infty$.

h) $f(x) = -e - 5 \cdot e^{-3x-4}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-3x-4} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -e$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{-3x-4} \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = -e$ für $x \rightarrow +\infty$.

i) $f(x) = (3 - e^{2x})^2$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{2x} \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{2x} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 9$.

Waagrechte Asymptote: $y = 9$ für $x \rightarrow -\infty$.

j) $f(x) = 2e^{2x} - e^x - 3 = e^x \cdot (2e^x - 1) - 3$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{2x} \rightarrow +\infty$ und $e^x \rightarrow +\infty$.

Aus dem Funktionsterm $2e^{2x} - e^x - 3$ kann man das Verhalten von $f(x)$ nicht direkt ablesen, da dann ein nicht interpretierbarer Ausdruck der Bauart " $\infty - \infty$ " entsteht.

Durch den umgeformten Term $f(x) = e^x \cdot (2e^x - 1) - 3$ erkennt man jedoch, dass das

Produkt $e^x(2e^x - 1) \rightarrow +\infty$ strebt. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{2x} \rightarrow 0$ und $e^x \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -3$.

Waagrechte Asymptote: $y = -3$ für $x \rightarrow -\infty$.

k) $f(x) = 4e^{-x} - e^{-3x} + e^2 = e^{-x} \cdot (4 - e^{-2x}) + e^2$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow 0$ und $e^{-3x} \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow e^2$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow +\infty$ und $e^{-3x} \rightarrow +\infty$.

Aus dem Funktionsterm $4e^{-x} - e^{-3x} + e^2$ kann man das Verhalten von $f(x)$ nicht direkt ablesen, da dann ein nicht interpretierbarer Ausdruck der Bauart " $\infty - \infty$ " entsteht.

Durch den umgeformten Term $f(x) = e^{-x} \cdot (4 - e^{-2x}) + e^2$ erkennt man jedoch, dass das

Produkt $e^{-x}(4 - e^{-2x}) \rightarrow -\infty$ strebt. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = e^2$ für $x \rightarrow +\infty$.

l) $f(x) = 2e^{-x} + 3e^x$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow 0$ und $e^x \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow +\infty$ und $e^x \rightarrow 0$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Eine waagrechte Asymptote ist nicht vorhanden.

Aufgabe 2:

a) $f(x) = x \cdot e^x$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow -\infty$.

Da die e-Funktion in dem Produkt dominiert gilt $f(x) \rightarrow 0$.

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \rightarrow -\infty$.

b) $f(x) = 4 + x^2 \cdot e^{-2x}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-2x} \rightarrow 0$ und $x \rightarrow +\infty$.

Da die e-Funktion in dem Produkt dominiert gilt $f(x) \rightarrow 4$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{-2x} \rightarrow +\infty$ und $x^2 \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = 4$ für $x \rightarrow +\infty$.

c) $f(x) = x^7 \cdot e^{-0,2x}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-0,2x} \rightarrow 0$ und $x^7 \rightarrow +\infty$.

Da die e-Funktion in dem Produkt dominiert gilt $f(x) \rightarrow 0$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{-0,2x} \rightarrow +\infty$ und $x^7 \rightarrow -\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \rightarrow +\infty$.

d) $f(x) = \frac{e^x}{x^4 + 1}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^x \rightarrow +\infty$ und $x^4 + 1 \rightarrow +\infty$.

Da die e-Funktion in dem Bruch dominiert gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^x \rightarrow 0$ und $x^4 + 1 \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 0$.

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \rightarrow -\infty$.

e) $f(x) = -x^2 \cdot e^{-x} + 3$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow 0$ und $-x^2 \rightarrow -\infty$.

Da die e-Funktion in dem Produkt dominiert gilt $f(x) \rightarrow 3$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow +\infty$ und $-x^2 \rightarrow -\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = 3$ für $x \rightarrow +\infty$.

f) $f(x) = \frac{-1 - x^2}{e^x}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^x \rightarrow +\infty$ und $-1 - x^2 \rightarrow -\infty$.

Da die e-Funktion in dem Bruch dominiert gilt $f(x) \rightarrow 0$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^x \rightarrow 0$ und $-1 - x^2 \rightarrow -\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \rightarrow +\infty$.

g) $f(x) = 2e^x - 10x^3$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $2e^x \rightarrow +\infty$ und $10x^3 \rightarrow +\infty$.

Da die e-Funktion in der Differenz dominiert gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^x \rightarrow 0$ und $10x^3 \rightarrow +\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Eine waagrechte Asymptote ist nicht vorhanden.

h) $f(x) = \frac{x - e^x}{x} = \frac{x}{x} - \frac{e^x}{x} = 1 - \frac{e^x}{x}$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.

Da die e-Funktion in dem Bruch dominiert gilt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow -\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow 1$.

Waagrechte Asymptote: $y = 1$ für $x \rightarrow -\infty$.

i) $f(x) = \frac{x - e^x}{e^x} = \frac{x}{e^x} - \frac{e^x}{e^x} = \frac{x}{e^x} - 1$

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.

Da die e-Funktion in dem Bruch dominiert gilt $f(x) \rightarrow -1$.

Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow -\infty$. Daher strebt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Waagrechte Asymptote: $y = -1$ für $x \rightarrow +\infty$.