

Analysis

Schwere Exponentialgleichungen

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2018

Aufgabe 1:

Löse die Gleichungen:

Hinweis: Gleichung umformen oder ausklammern oder Satz vom Nullprodukt

a) $\frac{3}{e^x} - e^x = 0$

b) $-\frac{3}{2e^{-x}} + 9 = 0$

c) $2e^{2x} - 3e^x = 0$

d) $0,5e^{-x} - 5e^x = 0$

e) $\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{5} = 0$

f) $2x \cdot e^x - 3e^x = 0$

g) $x^2 e^{3x} - 6x^2 = 0$

h) $e^{3x} - 2e^{x+1} = 0$

i) $3e^{x+2} - 6e^{-x+1} = 0$

j) $(x^2 - 4) \cdot (e^{3x} - 1) = 0$

k) $(x^3 + 8) \cdot (e^x + 2) = 0$

Aufgabe 2:Für welche Werte von a hat die Gleichung $ae^{2x} - e^x = 0$ keine bzw. eine Lösung?**Aufgabe 3:**

Löse die Gleichungen.

Hinweis: Substitution

a) $e^{2x} - 8,5e^x + 4 = 0$

b) $e^{2x} - 8e^x + 16 = 0$

c) $e^{-2x} = 3e^{-x} + 4$

d) $4 - 3e^{-0,5x} = e^{0,5x}$

e) $9e^{-x} + 9e^x - 82 = 0$

f) $5e^x + 25e^{-x} - 126 = 0$

g) $e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$

Lösungen**Aufgabe 1:**

a) $\frac{3}{e^x} - e^x = 0 \quad | \cdot e^x$

$$3 - e^{2x} = 0 \Rightarrow e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln(3)}{2}$$

b) $-\frac{3}{2e^{-x}} + 9 = 0 \quad | \cdot 2e^{-x}$

$$-3 + 18e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{6}\right)$$

c) $2e^{2x} - 3e^x = 0$

$$e^x \cdot (2e^x - 3) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $2e^x - 3 = 0 \Rightarrow x = \ln(1,5)$

d) $0,5e^{-x} - 5e^x = 0$

$$e^{-x} \cdot (0,5 - 5e^{2x}) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $0,5 - 5e^{2x} = 0 \Rightarrow e^{2x} = 0,1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(0,1)$

e) $\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{5} = 0 \quad | \cdot 10$

$$5e^x - 2e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x}(5e^{2x} - 2) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $5e^{2x} - 2 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 0,4 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(0,4)$

f) $2x \cdot e^x - 3e^x = 0$

$$e^x \cdot (2x - 3) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1,5$

g) $x^2 e^{3x} - 6x^2 = 0$

$$x^2 \cdot (e^{3x} - 6) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $e^{3x} - 6 = 0 \Rightarrow e^{3x} = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \ln(6)$

h) $e^{3x} - 2e^{x+1} = 0$

$e^x \cdot (e^{2x} - 2e) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $e^{2x} - 2e = 0 \Rightarrow e^{2x} = 2e \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2e)$

i) $3e^{x+2} - 6e^{-x+1} = 0$

$e^{-x} \cdot (3e^{2x+2} - 6e) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $3e^{2x+2} - 6e = 0 \Rightarrow e^{2x+2} = 2e \Rightarrow 2x + 2 = \ln(2e) \Rightarrow x = \frac{\ln(2e) - 2}{2}$

j) $(x^2 - 4) \cdot (e^{3x} - 1) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

Gleichung II): $e^{3x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{3x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \ln(1) = 0$

k) $(x^3 + 8) \cdot (e^x + 2) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$

Gleichung II): $e^x + 2 = 0$ ist nicht lösbar**Aufgabe 2:**

$ae^{2x} - e^x = 0$

$e^x \cdot (ae^x - 1) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $ae^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{a} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$

Die Gleichung besitzt eine Lösung für $a > 0$.Die Gleichung besitzt keine Lösung für $a \leq 0$.**Aufgabe 3:**

a) $e^{2x} - 8,5e^x + 4 = 0$ Substitution: $u = e^x$

$u^2 - 8,5u + 4 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{8,5 \pm \sqrt{56,25}}{2} = \frac{8,5 \pm 7,5}{2} \Rightarrow u_1 = 8 \text{ und } u_2 = 0,5$

Rücksubstitution: $e^x = 8 \Rightarrow x = \ln(8)$

$e^x = 0,5 \Rightarrow x = \ln(0,5)$

b) $e^{2x} - 8e^x + 16 = 0$ Substitution: $u = e^x$

$$u^2 - 8u + 16 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow u = 4$$

Rücksubstitution: $e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4)$

c) $e^{-2x} = 3e^{-x} + 4$ Substitution: $u = e^{-x}$

$$u^2 = 3u + 4 \Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow u_1 = 4 \text{ und } u_2 = -1$$

Rücksubstitution: $e^{-x} = 4 \Rightarrow x = -\ln(4)$

$e^x = -1$ ist nicht lösbar

d) $4 - 3e^{-0,5x} = e^{0,5x} \quad | \cdot e^{0,5x}$

$4e^{0,5x} - 3 = e^x$ Substitution: $u = e^{0,5x}$

$$4u - 3 = u^2 \Rightarrow u^2 - 4u + 3 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow u_1 = 3 \text{ und } u_2 = 1$$

Rücksubstitution: $e^{0,5x} = 3 \Rightarrow x = 2\ln(3)$

$e^{0,5x} = 1 \Rightarrow x = 0$

e) $9e^{-x} + 9e^x - 82 = 0 \quad | \cdot e^x$

$9 + 9e^{2x} - 82e^x = 0$ Substitution: $u = e^x$

$$9 + 9u^2 - 82u = 0 \Rightarrow 9u^2 - 82u + 9 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{82 \pm \sqrt{6400}}{18} = \frac{82 \pm 80}{18} \Rightarrow u_1 = 9, u_2 = \frac{1}{9}$$

Rücksubstitution: $e^x = 9 \Rightarrow x = \ln(9)$

$e^x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

f) $5e^x + 25e^{-x} - 126 = 0 \quad | \cdot e^x$

$5e^{2x} + 25 - 126e^x = 0$ Substitution: $u = e^x$

$$5u^2 - 126u + 25 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{126 \pm 124}{10} \Rightarrow u_1 = 25, u_2 = \frac{1}{5}$$

Rücksubstitution: $e^x = 25 \Rightarrow x = \ln(25)$

$e^x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

g) $e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x$

$e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$ Substitution: $u = e^x$

$$u^2 - 2u - 15 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow u_1 = 5, u_2 = -3$$

Rücksubstitution: $e^x = 5 \Rightarrow x = \ln(5)$

$e^x = -3$ ist nicht lösbar