

Analysis

Tangenten

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2018

Aufgabe 1:

Für die Funktion f sind ein Punkt $B(3/4)$ auf dem Schaubild von f sowie die Ableitung $f'(3) = 2$ gegeben. Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt B .

Aufgabe 2:

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $B(b/f(b))$.

a) $f(x) = 2x^2 - x$; $b = 1$

b) $f(x) = x^4 + 3x$; $b = -1$

c) $f(x) = \frac{2}{x^2}$; $b = -2$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$; $b = 10$

Aufgabe 3:

In welchem Punkt schneidet die Tangente an den Graphen von f im Punkt B die x -Achse?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$, $B(-1/f(-1))$

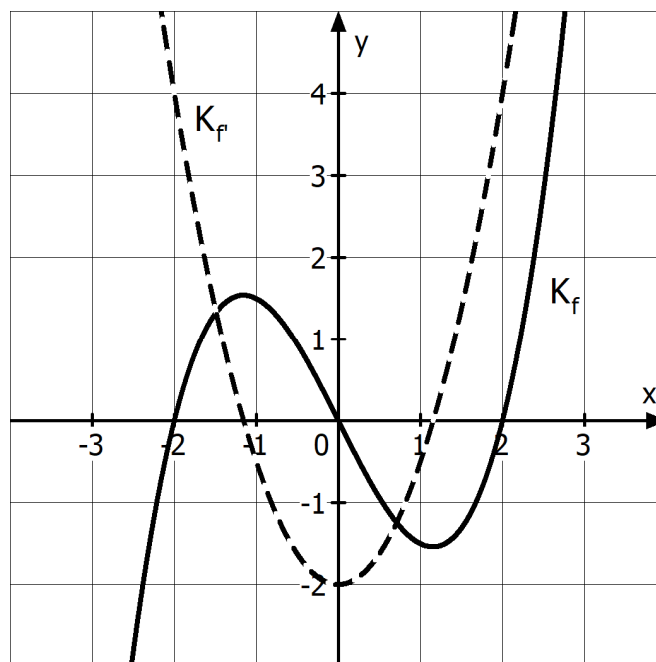
b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $B(-1/f(-1))$

Aufgabe 4:

In der folgenden Abbildung sind die Schaubilder einer Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' (gestrichelt) eingezeichnet.

Bestimme anhand der Schaubilder rechnerisch die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f an den Stellen $x = 2$ und $x = 0$.

(Hinweis: Die Tangente soll nicht näherungsweise eingezeichnet werden).

**Aufgabe 5:**

Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x$, die parallel sind zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 3$.

Aufgabe 6:

Nach einer Krankheitswelle sinkt die Anzahl der Erkrankten.

Zum Zeitpunkt t nach Beobachtungsbeginn sind $f(t) = \frac{6}{t}$ Personen erkrankt

($2 \leq t \leq 6$ in Wochen, $f(t)$ in Tausend Personen).

Für $t \geq 6$ nimmt die Anzahl der Erkrankten linear ab, wobei der Graph von $f(t)$ ohne Knick in den Graphen der linearen Abnahme übergeht.

Bestimme die Gleichung der Geraden, die die lineare Abnahme beschreibt.

Zu welchem Zeitpunkt ist die Krankheitswelle vorbei?

Aufgabe 7:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 1$.

- a) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $B(6/f(6))$.
- b) Bestimme durch Rechnung einen Punkt Q des Graphen, in dem die Tangente parallel ist zur Geraden g mit der Gleichung $y = -8x + 5$. Gib die Gleichung der Tangente an.

Aufgabe 8:

Bestimme die Tangentengleichung an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x - 2$, die die Steigung 2 besitzt.

Berechne den Inhalt des Dreiecks, das von dieser Tangente und den Koordinatenachsen begrenzt wird.

Aufgabe 9:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,5x^2$.

Bestimme die Punkte des Graphen, dessen Tangenten durch den Punkt $P(1/0)$ verlaufen.

Aufgabe 10:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 2$.

- a) Vom Ursprung $O(0/0)$ aus sollen Tangenten an das Schaubild von f gelegt werden. Berechne die Berührungspunkte.
- b) Welche Tangenten gehen durch den Punkt $P(0/6)$? Gib die zugehörigen Berührungspunkte des Graphen an.

Lösungen**Aufgabe 1:**

Die allgemeine Tangentengleichung lautet: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Die Berührstelle ist $u = 3$.

Gleichung der Tangente: $y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

Aus den Angaben folgt: $f(3) = 4$ und $f'(3) = 2$

Tangentengleichung: $y = 2 \cdot (x - 3) + 4 \Rightarrow y = 2x - 2$

Aufgabe 2:

a) $f(x) = 2x^2 - x$; $b = 1$

Es gilt $f'(x) = 4x - 1$

Gleichung der Tangente: $y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

Es gilt $f(1) = 1$ und $f'(1) = 3$

Tangentengleichung: $y = 3 \cdot (x - 1) + 1 \Rightarrow y = 3x - 2$

b) $f(x) = x^4 + 3x$; $b = -1$

Es gilt $f'(x) = 4x^3 + 3$

Gleichung der Tangente: $y = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1)$

Es gilt $f(-1) = -2$ und $f'(-1) = -1$

Tangentengleichung: $y = (-1) \cdot (x + 1) - 2 \Rightarrow y = -x - 3$

c) $f(x) = \frac{2}{x^2}$; $b = -2$

Aus $f(x) = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$ folgt $f'(x) = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$

Gleichung der Tangente: $y = f'(-2) \cdot (x + 2) + f(-2)$

Es gilt $f(-2) = 0,5$ und $f'(-2) = 0,5$

Tangentengleichung: $y = 0,5 \cdot (x + 2) + 0,5 \Rightarrow y = 0,5x + 1,5$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$; $b = 10$

Aus $f(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ folgt $f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-1}}$ (Kettenregel)

Gleichung der Tangente: $y = f'(10) \cdot (x - 10) + f(10)$

Es gilt $f(10) = 3$ und $f'(10) = \frac{1}{6}$

Tangentengleichung: $y = \frac{1}{6} \cdot (x - 10) + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$

Aufgabe 3:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$, $B(-1/f(-1))$

Es gilt $f'(x) = x^2 + 4x$

Die Berührstelle ist $u = -1$.

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1)$

Es gilt $f(-1) = \frac{5}{3}$ und $f'(-1) = -3$.

Tangentengleichung: $y = -3 \cdot (x + 1) + \frac{5}{3} \Rightarrow y = -3x - \frac{4}{3}$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $B(-1/f(-1))$

Mit $f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1}$ folgt $f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$

Die Berührstelle ist $u = -1$.

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1)$

Es gilt $f(-1) = -3$ und $f'(-1) = -3$.

Tangentengleichung: $y = -3 \cdot (x + 1) - 3 \Rightarrow y = -3x - 6$

Aufgabe 4:

Gleichung an der Stelle $x = 2$:

Aus den Schaubildern lässt sich ablesen:

Berührpunkt $B(2/0)$, also $f(2) = 0$.

Steigung bei $x = 2$: $f'(2) = 4$

Ansatz für Tangentengleichung bei $u = 2$: $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

Tangentengleichung: $y = 4(x - 2) + 0 \Rightarrow y = 4x - 8$

Gleichung an der Stelle $x = 0$:

Aus den Schaubildern lässt sich ablesen:

Berührpunkt $B(0/0)$, also $f(0) = 0$.

Steigung bei $x = 0$: $f'(0) = -2$

Ansatz für Tangentengleichung bei $u = 0$: $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

Tangentengleichung: $y = -2(x - 0) + 0 \Rightarrow y = -2x$

Aufgabe 5:

Aus $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x$ folgt $f'(x) = x^2 + x - 10$

Da die Tangente die Steigung 2 besitzen soll, muss gelten: $f'(x) = 2$

$x^2 + x - 10 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$$\text{a-b-c-Formel: } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -4$$

Eine Tangente hat die Berührstelle $u = 3$:

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

Es gilt $f'(3) = 2$ und $f(3) = -16,5$

Tangentengleichung: $y = 2(x - 3) - 16,5 \rightarrow y = 2x - 22,5$

Eine Tangente hat die Berührstelle $u = -4$:

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(-4) \cdot (x + 4) + f(-4)$

Es gilt $f'(-4) = 2$ und $f(-4) = \frac{80}{3}$

Tangentengleichung: $y = 2(x + 4) + \frac{80}{3} \rightarrow y = 2x + \frac{104}{3}$

Aufgabe 6:

Die Gleichung der Geraden, die die lineare Abnahme beschreibt, ist die Tangente, die das Schaubild von f an der Stelle $t = 6$ berührt.

Dass es sich um eine Tangente handelt ergibt sich aus der Formulierung „ohne Knick“.

Mit $f(t) = \frac{6}{t} = 6t^{-1}$ folgt $f'(t) = -6t^{-2} = -\frac{6}{t^2}$

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(6) \cdot (t - 6) + f(6)$

Es gilt $f(6) = 1$ und $f'(6) = -\frac{1}{6}$.

Tangentengleichung: $y = -\frac{1}{6} \cdot (t - 6) + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}t + 2$

Die Krankheitswelle ist vorbei, wenn die Tangente die t -Achse schneidet.

$$-\frac{1}{6}t + 2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6}t = -2 \Rightarrow t = 12$$

Nach 12 Wochen ist die Krankheitswelle vorbei.

Aufgabe 7:

a) Es gilt $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 1$ und $f'(x) = \frac{4}{3}x - 4$

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(6) \cdot (x - 6) + f(6)$

Es gilt $f(6) = 1$ und $f'(6) = 4$

Tangentengleichung in B: $y = 4 \cdot (x - 6) + 1 \Rightarrow y = 4x - 23$

b) Gesucht ist eine Tangente mit der Steigung $m = -8$:

Bedingung: $f'(x) = -8$

$$\frac{4}{3}x - 4 = -8 \Rightarrow x = -3$$

Berechnung des y-Wertes des Berührungspunktes Q: $f(-3) = 19$

Koordinaten von Q: Q(-3/19)

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(-3) \cdot (x + 3) + f(-3)$

Mit $f(-3) = 19$ und $f'(-3) = -8$ folgt für die Tangentengleichung:

$$y = -8 \cdot (x + 3) + 19 \Rightarrow y = -8x - 5$$

Aufgabe 8:

Es gilt $f(x) = x^2 - 2x - 2$ und $f'(x) = 2x - 2$

Gesucht ist eine Tangente mit der Steigung $m = 2$:

Bedingung: $f'(x) = 2$

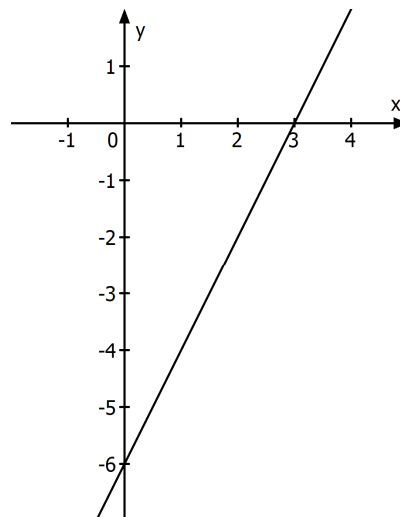
$$2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$$

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

Es gilt $f(2) = -2$ und $f'(2) = 2$

Tangentengleichung: $y = 2(x - 2) - 2 \Rightarrow y = 2x - 6$

Einzeichnen der Tangente in ein Koordinatensystem:



Die Fläche beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ Flächeneinheiten.

Aufgabe 9:

Es gilt $f(x) = 0,5x^2$ und $f'(x) = x$.

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Einsetzen des gegebenen Punktes $P(1/0)$ für x und y und Berechnung von u :

$$0 = f'(u) \cdot (1 - u) + f(u)$$

$$0 = u \cdot (1 - u) + 0,5u^2 \Rightarrow 0 = -0,5u^2 + u$$

$$\Rightarrow u \cdot (-0,5u + 1) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $u = 0$

Gleichung II): $-0,5u + 1 = 0 \Rightarrow u = 2$

Man kann von P aus zwei Tangenten an das Schaubild von f anlegen.

Berührungspunkte: $B_1(0 / f(0)) \rightarrow B_1(0 / 0)$ und $B_2(2 / f(2)) \rightarrow B_2(2 / 2)$

Aufgabe 10:

a) Es gilt $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 2$ und $f'(x) = -x + 2$.

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Einsetzen des gegebenen Punktes $O(0/0)$ für x und y und Berechnung von u :

$$0 = f'(u) \cdot (0 - u) + f(u)$$

$$0 = (-u + 2) \cdot (-u) - 0,5u^2 + 2u - 2$$

$$\Rightarrow 0 = u^2 - 2u - 0,5u^2 + 2u - 2$$

$$\Rightarrow 0,5u^2 - 2 = 0 \Rightarrow u^2 = 4 \Rightarrow u = \pm 2$$

Man kann von O aus zwei Tangenten an das Schaubild von f anlegen.

Berührungspunkte: $B_1(-2 / f(-2)) \rightarrow B_1(-2 / -8)$ und $B_2(2 / f(2)) \rightarrow B_2(2 / 0)$

b) Es gilt $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 2$ und $f'(x) = -x + 2$.

Ansatz für Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Einsetzen des gegebenen Punktes $P(0/6)$ für x und y und Berechnung von u :

$$6 = f'(u) \cdot (0 - u) + f(u)$$

$$6 = (-u + 2) \cdot (-u) - 0,5u^2 + 2u - 2$$

$$\Rightarrow 6 = u^2 - 2u - 0,5u^2 + 2u - 2$$

$$\Rightarrow 0,5u^2 - 8 = 0 \Rightarrow u^2 = 16 \Rightarrow u = \pm 4$$

Man kann von P aus zwei Tangenten an das Schaubild von f anlegen.

Berührungspunkte: $B_1(-4 / f(-4)) \rightarrow B_1(-4 / -18)$ und $B_2(4 / f(4)) \rightarrow B_2(4 / -2)$

Tangentengleichung in B_1 : $y = f'(-4)(x + 4) + f(-4)$

Es gilt $f(-4) = -18$ und $f'(-4) = 6$

Tangentengleichung: $y = 6(x + 4) - 18 \Rightarrow y = 6x + 6$

Tangentengleichung in B_2 : $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$

Es gilt $f(4) = -2$ und $f'(4) = -2$

Tangentengleichung: $y = -2(x - 4) - 2 \Rightarrow y = -2x + 6$