

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Bayern

Prüfungsteil A Analysis Aufgabengruppe 2

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Analysis: Aufgabengruppe 2**Aufgabe 1: (a) 3 BE, b) 2 BE)**

Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(2 - x^2)$ mit maximaler Definitionsmenge D_g .

- Skizzieren Sie die Parabel mit der Gleichung $y = 2 - x^2$ in einem Koordinatensystem und geben Sie D_g an.
- Ermitteln Sie den Term der Ableitungsfunktion g' von g .

Aufgabe 2: (a) 3 BE, b) 2 BE)

Die Abbildung 1 zeigt einen Teil des Graphen G_h einer in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierten gebrochenrationalen Funktion h .

Die Funktion h hat bei $x = 2$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel; zudem besitzt G_h die Gerade mit der Gleichung $y = x - 7$ als schräge Asymptote.

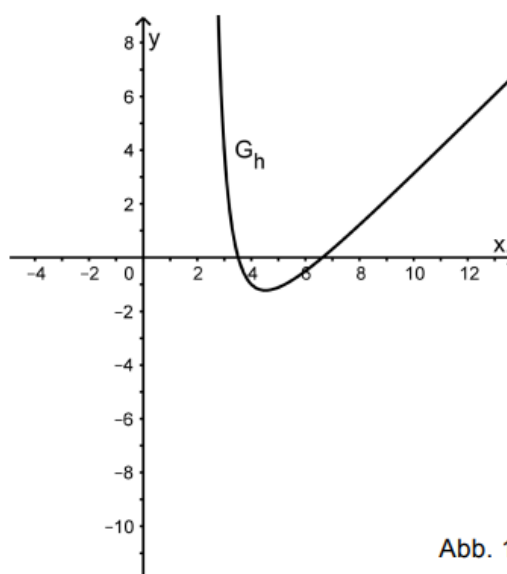


Abb. 1

- Zeichnen Sie in die Abbildung 1 die Asymptoten von G_h ein und skizzieren Sie im Bereich $x < 2$ einen möglichen Verlauf von G_h .
- Berechnen Sie unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens von G_h einen Näherungswert für $\int_{10}^{20} h(x) dx$.

Aufgabe 3: (a) 3 BE, b) 2 BE)

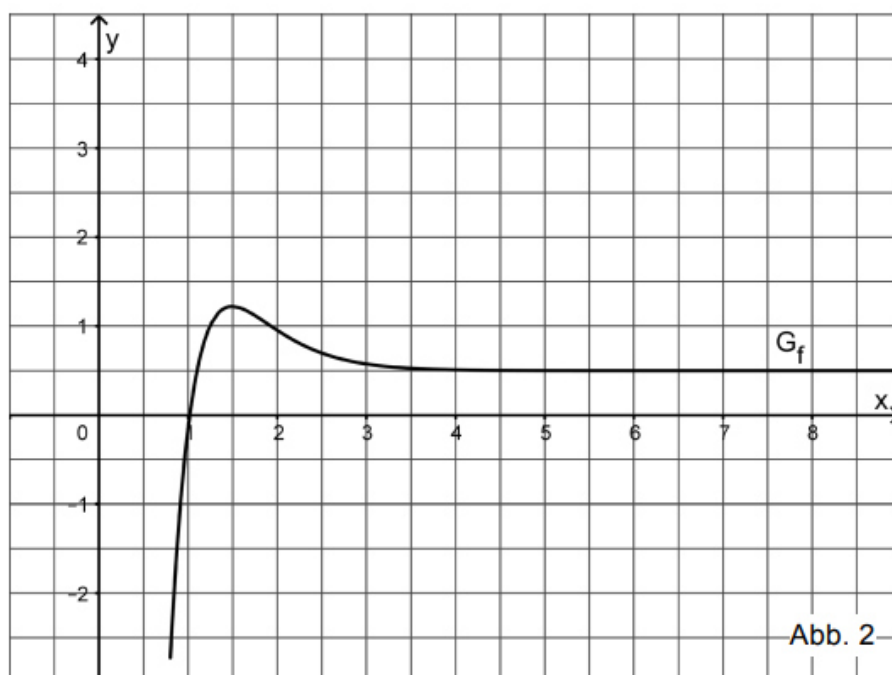
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto \frac{-x^2 + 2x}{2x^2 + 4}$.

Ihr Graph wird mit G_k bezeichnet.

- Geben Sie die Nullstellen von k an und begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass G_k die Gerade mit der Gleichung $y = -0,5$ als waagrechte Asymptote besitzt.
- Berechnen Sie die x -Koordinate des Schnittpunkts von G_k mit der waagrechten Asymptote.

Aufgabe 4: (5 BE)

Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f einer in $[0,8;+\infty[$ definierten Funktion f .



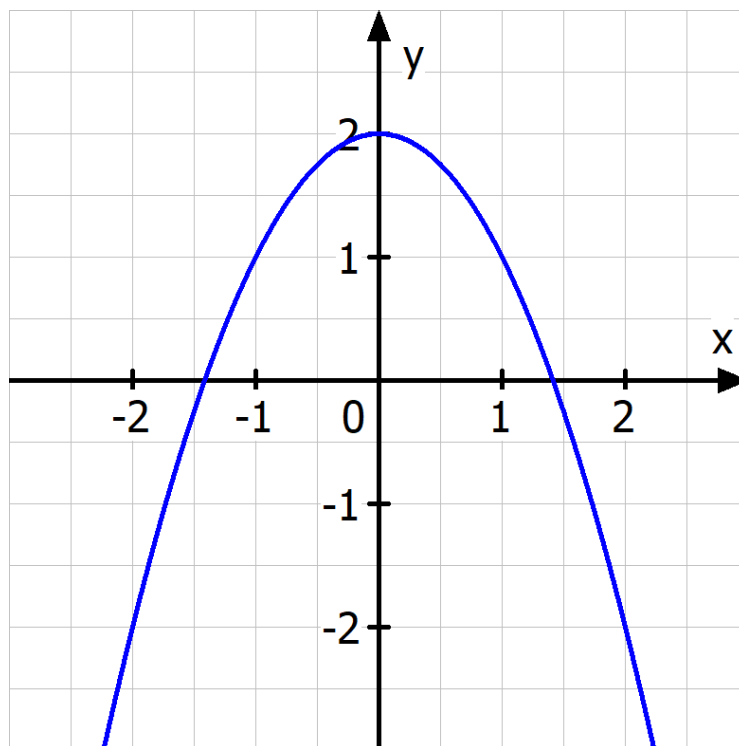
Betrachtet wird zudem die in $[0,8;+\infty[$ definierte Integralfunktion $J: x \mapsto \int_2^x f(t) dt$.

Begründen Sie mithilfe von Abbildung 2, dass $J(1) \approx -1$ gilt, und geben Sie einen Näherungswert für den Funktionswert $J(4,5)$ an.

Skizzieren Sie den Graphen von J in der Abbildung 2.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 2****Aufgabe 1:**

- a) Skizzieren Sie die Parabel mit der Gleichung $y = 2 - x^2$ in einem Koordinatensystem und geben Sie D_g an.



Nullstellen der Parabel: $2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Bedingung für D_g : $2 - x^2 > 0$

Anschaulich sind dies die Stellen, bei denen die Parabel oberhalb der x-Achse liegt. Diese befinden sich zwischen den Nullstellen.

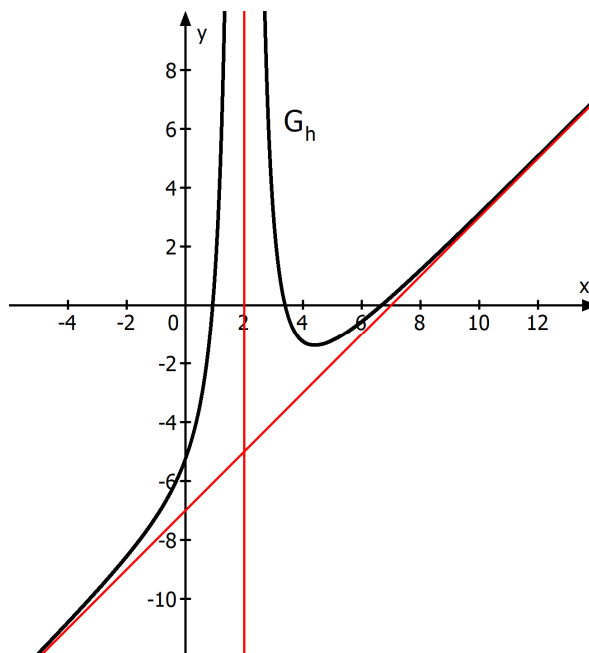
$$D_g =]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$$

- b) Ermitteln Sie den Term der Ableitungsfunktion g' von g .

$$g'(x) = \frac{1}{2-x^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{x^2-2}$$

Aufgabe 2:

- a) Zeichnen Sie in die Abbildung 1 die Asymptoten von G_h ein und skizzieren Sie im Bereich $x < 2$ einen möglichen Verlauf von G_h .



- b) Berechnen Sie unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens von G_h einen Näherungswert für $\int_{10}^{20} h(x) dx$.

Für große x -Werte kann das Schaubild von h durch die schräge Asymptote näherungsweise repräsentiert werden.

$$\int_{10}^{20} h(x) dx \approx \int_{10}^{20} (x - 7) dx = \left[0,5x^2 - 7x \right]_{10}^{20} = 0,5 \cdot 400 - 140 - (0,5 \cdot 100 - 70) = 80$$

Aufgabe 3:

- a) Geben Sie die Nullstellen von k an und begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass G_k die Gerade mit der Gleichung $y = -0,5$ als waagrechte Asymptote besitzt.

Nullstellen: $k(x) = 0$

$$\frac{-x^2 + 2x}{2x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-x + 2) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Die Nullstellen sind $x = 0$ und $x = 2$.

Begründung der waagrechten Asymptote $y = -0,5$:

$$\text{Berechnung des Grenzwertes: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

Hinweis:

Bei der ersten Umformung wurde der Bruch mit x^2 gekürzt.

Die entstehenden Terme $\frac{2}{x}$ und $\frac{4}{x^2}$ streben gegen 0 für $x \rightarrow +\infty$.

- b) Berechnen Sie die x -Koordinate des Schnittpunkts von G_k mit der waagrechten Asymptote.

$$\frac{-x^2 + 2x}{2x^2 + 4} = -0,5 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = -0,5(2x^2 + 4) \Leftrightarrow -x^2 + 2x = -x^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

Aufgabe 4:

Begründen Sie mithilfe von Abbildung 2, dass $J(1) \approx -1$ gilt, und geben Sie einen Näherungswert für den Funktionswert $J(4,5)$ an.

Es gilt $J(1) = \int_2^1 f(t) dt \approx -1$, da die Fläche zwischen der x-Achse und dem Schaubild von f ungefähr 1 ist.

Das Integral ist negativ, da die Fläche zwar oberhalb der x-Achse liegt, aber von rechts nach links integriert wird.

$$J(4,5) = \int_2^{4,5} f(t) dt \approx 6 \cdot 0,25 = 1,5 \quad (\text{Kästchen zählen})$$

Skizzieren Sie den Graphen von J in der Abbildung 2.

