

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Bayern

Prüfungsteil A Analysis Aufgabengruppe 1

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2022

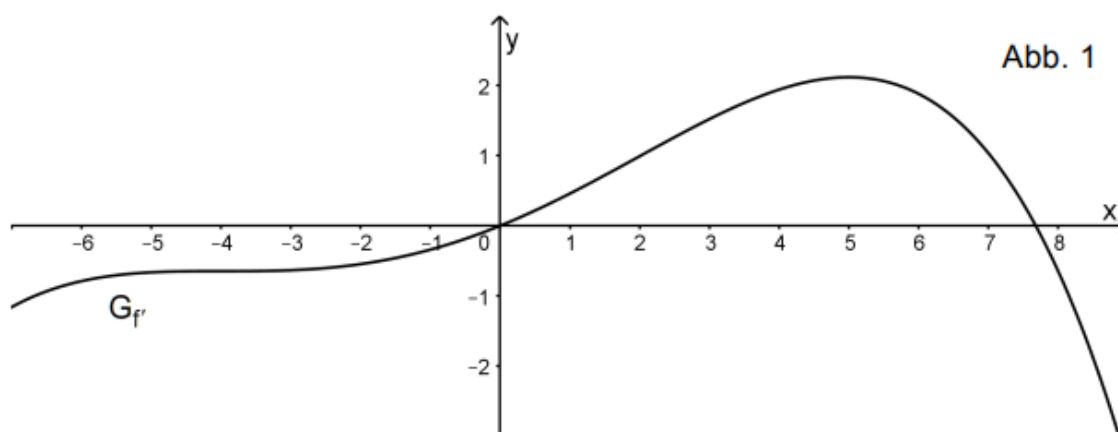
Analysis: Aufgabengruppe 1**Aufgabe 1: (a) 2 BE, b) 3 BE)**

Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto x \cdot \ln(x^2)$ mit maximalem Definitionsbereich D_h .

- a) Geben Sie D_h an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion h' von h gilt: $h'(x) = \ln(x^2) + 2$
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von h .

Aufgabe 2: (a) 2 BE, b) 2 BE)

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f . Nur in den Punkten $(-4 \mid f'(-4))$ und $(5 \mid f'(5))$ hat der Graph $G_{f'}$ waagrechte Tangenten.



- a) Begründen Sie, dass f genau eine Wendestelle besitzt.
- b) Es gibt Tangenten an den Graphen von f , die parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten sind. Ermitteln Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' in der Abbildung 1 Näherungswerte für die x -Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von f jeweils eine solche Tangente hat.

Aufgabe 3: (a) 3 BE, b) 2 BE)

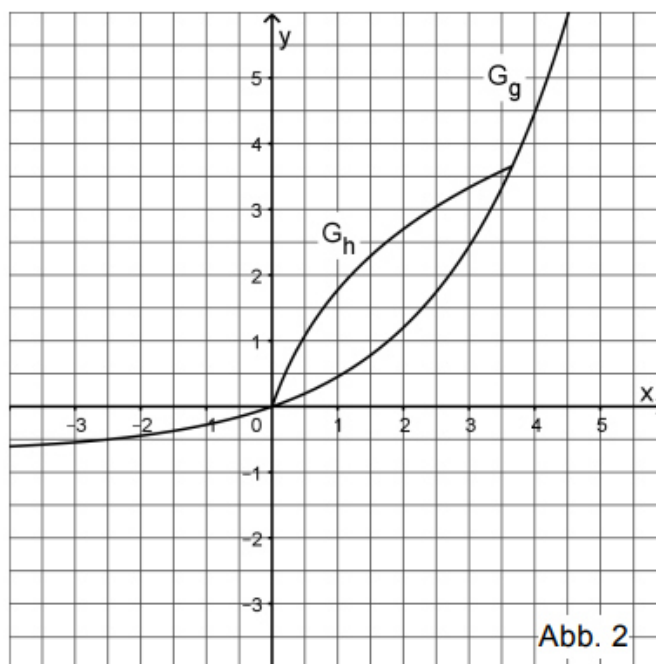
Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f : x \mapsto x^2 + 4$ und $g_m : x \mapsto m \cdot x$ mit $m \in \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f und der Graph von g_m mit G_m bezeichnet.

- a) Skizzieren Sie G_f in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punkts der Graphen G_f und G_4 .
- b) Es gibt Werte von m , für die die Graphen G_f und G_m jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben. Geben Sie diese Werte von m an.

Aufgabe 4: (a) 2 BE, b) 2 BE, c) 2 BE)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 0,7 \cdot e^{0,5x} - 0,7$ und $x \in \mathbb{R}$.

Die Funktion g ist umkehrbar. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g von g sowie einen Teil des Graphen G_h der Umkehrfunktion h von g .



- a) Zeichnen Sie in die Abbildung 2 den darin fehlenden Teil von G_h ein.
- b) Betrachtet wird das von den Graphen G_g und G_h eingeschlossene Flächenstück. Schraffieren Sie den Teil dieses Flächenstücks, dessen Inhalt mit dem Term $2 \cdot \int_0^{2,5} (x - g(x)) dx$ berechnet werden kann.
- c) Geben Sie den Term einer Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k : x \mapsto x - g(x)$ an.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 1****Aufgabe 1:**

- a) Geben Sie D_h an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion h' von h gilt: $h'(x) = \ln(x^2) + 2$

$$h(x) = x \cdot \ln(x^2)$$

Definitionsmenge von h : Es muss $x^2 > 0$ sein, das heißt $x \neq 0$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h'(x) = 1 \cdot \ln(x^2) + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \ln(x^2) + 2 \text{ was zu zeigen war}$$

- b) Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von h .

Notwendige Bedingung für Hochpunkt: $h'(x) = 0$

$$\ln(x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = -2 \Leftrightarrow x^2 = e^{-2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{e^{-2}} = \pm e^{-1}$$

Da der Hochpunkt im II. Quadranten liegen soll, muss $x < 0$ sein.

Somit kommt als x -Wert nur $x = -e^{-1}$ in Betracht.

$$\text{Es gilt } h(-e^{-1}) = -e^{-1} \cdot \ln\left((-e^{-1})^2\right) = -e^{-1} \cdot \ln(e^{-2}) = -e^{-1} \cdot (-2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

Koordinaten des Hochpunktes; $H(-e^{-1} \mid 2e^{-1})$ bzw. $H(-\frac{1}{e} \mid \frac{2}{e})$

Da der y -Wert des Hochpunktes positiv ist, liegt der Hochpunkt tatsächlich im II. Quadrant.

Aufgabe 2:

- a) Begründen Sie, dass f genau eine Wendestelle besitzt.

Besitzt der Graph von f eine Wendestelle, liegt beim Graph der Ableitungsfunktion f' ein Extrempunkt vor.

Da der gegebene Graph von f' nur eine Extremstelle bei $x = 5$ besitzt, hat der Graph von f genau eine Wendestelle.

- b) Ermitteln Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' in der Abbildung 1 Näherungswerte für die x -Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von f jeweils eine solche Tangente hat.

Die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten besitzt die Gleichung $y = x$.

Sie hat die Steigung $m = 1$.

Es muss gelten: $f'(x) = 1$

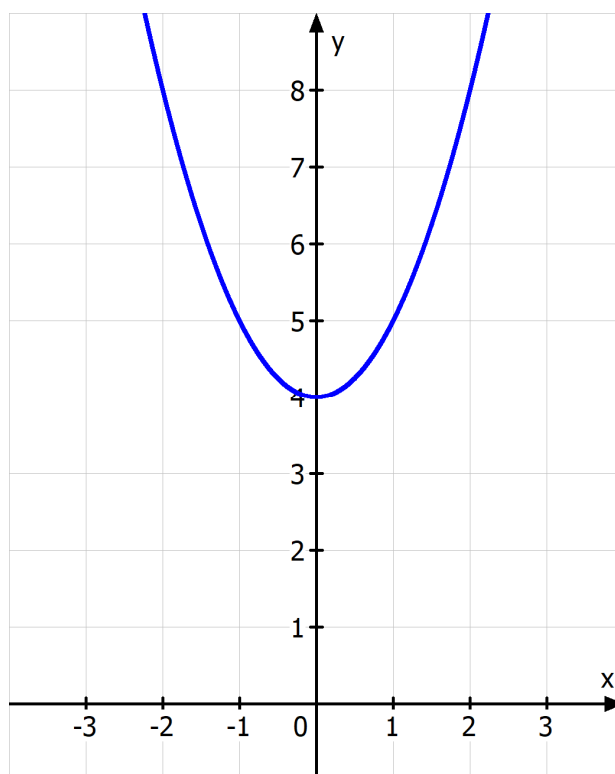
Gesucht sind die Stellen, an denen das Schaubild von f' den y -Wert 1 besitzt.

Dies ist der Fall bei $x_1 \approx 2$ und $x_2 \approx 7$.

Aufgabe 3:

- a) Skizzieren Sie G_f in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punkts der Graphen G_f und G_4 .

Skizze von $f(x) = x^2 + 4$



Gemeinsame Punkte:

Bedingung: $f(x) = g_4(x)$

$$x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Wegen $f(2) = 8$ lautet der gemeinsame Punkt $B(2|8)$.

Hinweis: Es handelt sich um einen Berührungspunkt.

b) *Geben Sie diese Werte von m an.*

Die folgende Gleichung darf keine Lösung haben:

$$x^2 + 4 = mx \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 16}}{2}$$

Bedingung, damit keine Lösung existiert: $m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 16$

Die letzte Ungleichung wird erfüllt, wenn $-4 < m < 4$ gilt.

Aufgabe 4:

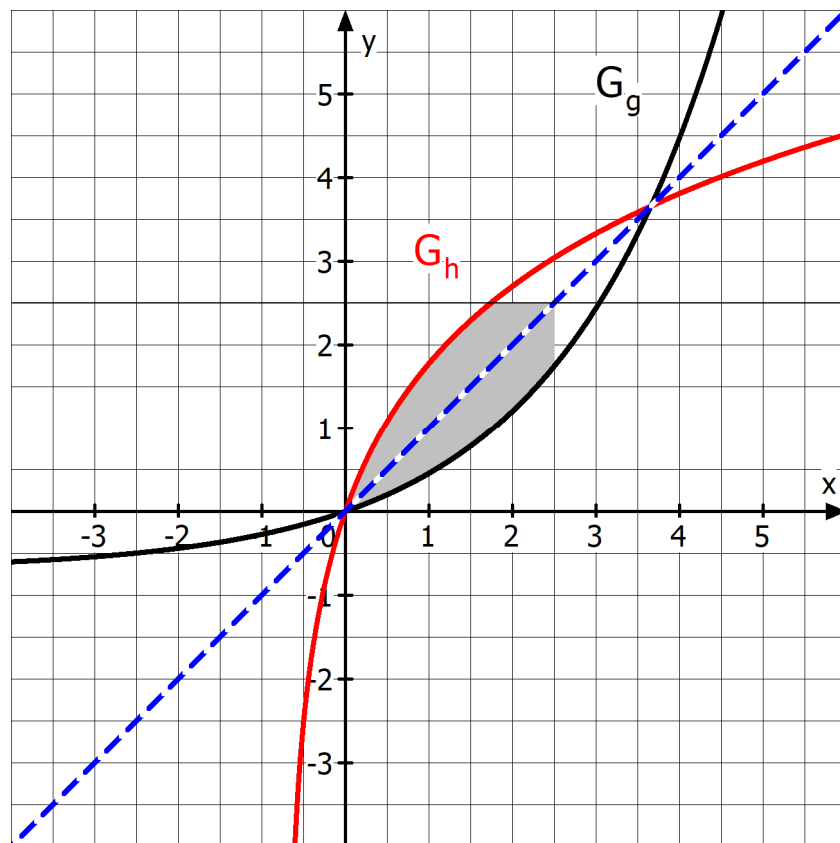
a) *Zeichnen Sie in die Abbildung 2 den darin fehlenden Teil von G_h ein.*

Das Schaubild der Umkehrfunktion h ergibt sich aus dem Schaubild von g durch die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$.
Siehe Abbildung unten.

b) *Schraffieren Sie den Teil dieses Flächenstücks, dessen Inhalt mit dem Term*

$$2 \cdot \int_0^{2,5} (x - g(x)) dx \text{ berechnet werden kann.}$$

Das Integral entspricht dem doppelten Inhalt des Flächenstücks zwischen dem Schaubild von g und der Geraden $y = x$ im Intervall $[0; 2,5]$.
Siehe Abbildung unten.



- g) Geben Sie den Term einer Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k: x \mapsto x - g(x)$ an.

$$\text{Es gilt } k(x) = x - (0,7e^{0,5x} - 0,7) = x - 0,7e^{0,5x} + 0,7$$

$$\text{Stammfunktion: } K(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{0,7}{0,5}e^{0,5x} + 0,7x = 0,5x^2 - 1,4e^{0,5x} + 0,7x$$