

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Bayern

Prüfungsteil B Analytische Geometrie Aufgabengruppe 2

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Aufgabengruppe 2

a) 2 BE, b) 3 BE, c) 4 BE, d) 5 BE, e) 3 BE, f) 4 BE, g) 4 BE

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.



Abb. 1

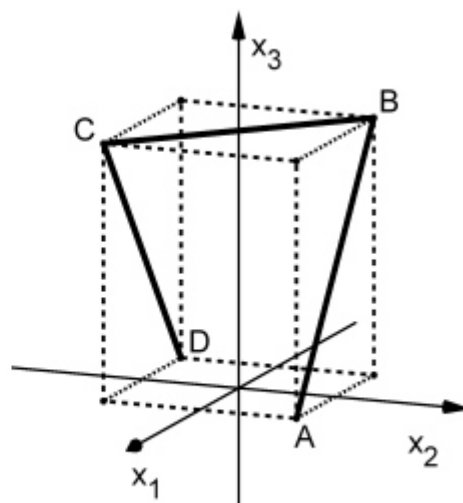


Abb. 2

a) Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3 -Achse liegen.

b) Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit.

Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$)

d) Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1x_2 -Ebene schneidet. Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.

e) Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.

- f) Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.



Abb. 3



Abb. 4

Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

- g) Der Punkt $P(0|0|h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h :

$$\text{I } \vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1] \quad \text{II } \overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0 \quad \text{III } \overline{PQ} = 28 - h$$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.

Lösungen**Analytische Geometrie: Aufgabengruppe 2**

- a) *Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3 -Achse liegen.*

Die Punkte B(-11|11|28) und C(11|-11|28) haben vom Betrag her gleiche, aber vom Vorzeichen unterschiedliche x_1 - und x_2 -Koordinaten sowie die gleiche x_3 -Koordinate.

Daher haben sie den gleichen Abstand zur x_3 -Achse und sind zu dieser symmetrisch.

- b) *Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit.*

$$|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}| = \left| \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{484 + 784} + \sqrt{484 + 484} + \sqrt{484 + 784} \\ = \sqrt{1268} + \sqrt{968} + \sqrt{1268} \approx 102,33$$

Die Länge des Streckenzugs beträgt etwa 102,33 m.

- c) *Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.*

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \overline{AB} \times \overline{BC} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 616 \\ 616 \\ 484 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ansatz der Koordinatengleichung: $E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = d$

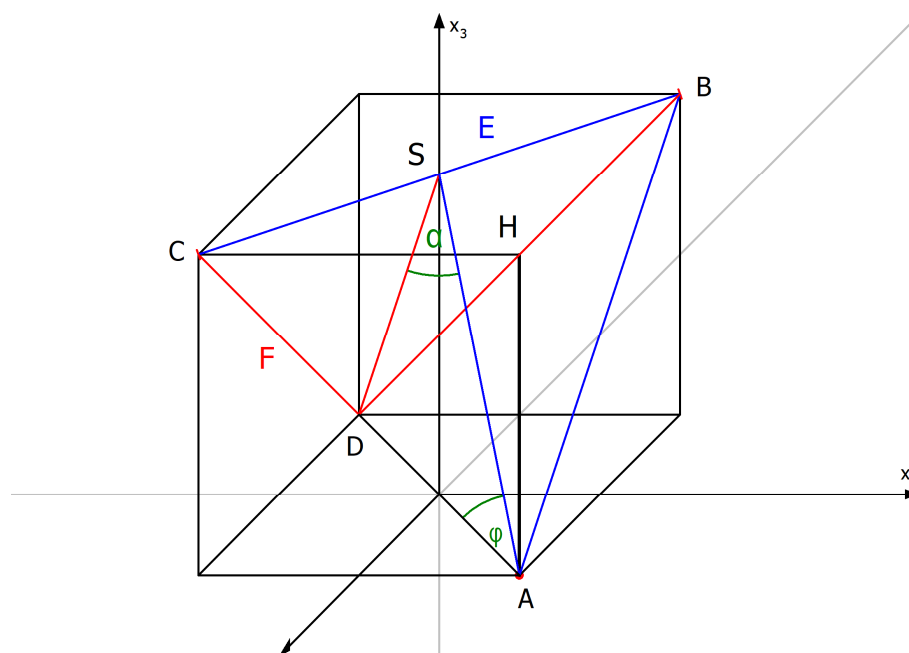
Einsetzen von Punkt A(11|11|0): $14 \cdot 11 + 14 \cdot 11 + 0 = d \Leftrightarrow d = 308$

Koordinatengleichung: $E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$

- d) *Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1x_2 -Ebene schneidet.*

$$\cos \varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{196 + 196 + 121}} = \frac{11}{\sqrt{513}} \Rightarrow \varphi \approx 60,9^\circ$$

Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.



Der Winkel α zwischen den Ebenen E (durch die Punkte ABC) und F (durch die Punkte BCD) ist der Winkel an der Spitze des Dreiecks ADS mit der Basis $[AD]$. Wegen der Symmetrie von B und C zur x_3 -Achse sind auch A und D symmetrisch zur x_3 -Achse. Das Dreieck ADS ist gleichschenkelig.

Der Winkel φ wurde bereits berechnet.

Es gilt $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot \varphi$.

- e) Bestimmen Sie den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.

Der pyramidenförmige Teil entspricht der Pyramide mit den Eckpunkten $BCHA$.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G_{\text{Pyramide}} \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle BCH} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{CH} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{6} \cdot \overline{CH} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{AH}$$

$$\text{Volumen des Quaders: } V_{\text{Quader}} = \overline{CH} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{AH}$$

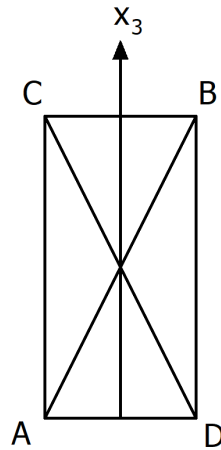
$$\text{Daraus folgt } V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Quader}}$$

Der Anteil des Pyramidenvolumens am Quadvolumen beträgt $\frac{1}{6}$.

- f) Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt.

Abbildung 3:

Das Polygon muss gedreht werden:



Dreht man im Uhrzeigersinn, dann entsteht die Abbildung. Man schaut von der positiven x_2 -Achse aus auf das Polygon.

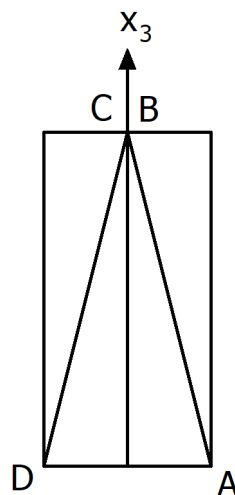
Ein möglicher Vektor ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Weitere Möglichkeit: Würde man weiter drehen, schaut man von der negativen

x_2 -Achse mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf das Polygon. Dann wäre D links und A

rechts.

Abbildung 4:



Dreht man gegen den Uhrzeigersinn, so entsteht als Abbildung ein umgedrehtes V. Hier schaut man von der Winkelhalbierenden zwischen der positiven x_1 -Achse und der negativen x_2 -Achse auf das Polygon.

Die Punkte B und C werden zu einem Punkt.

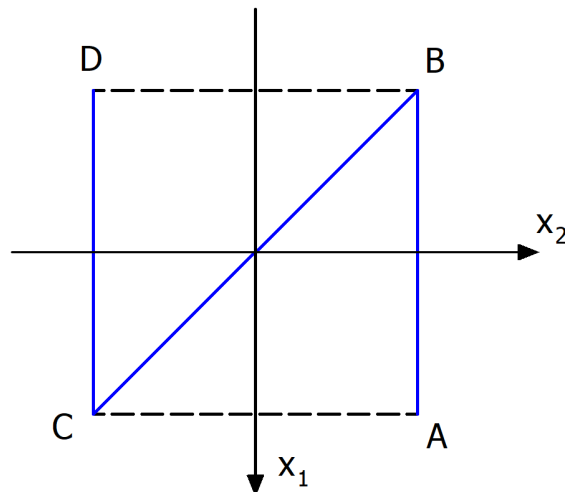
Ein möglicher Vektor ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Würde man weiter drehen, schaut man von der anderen Seite auf das

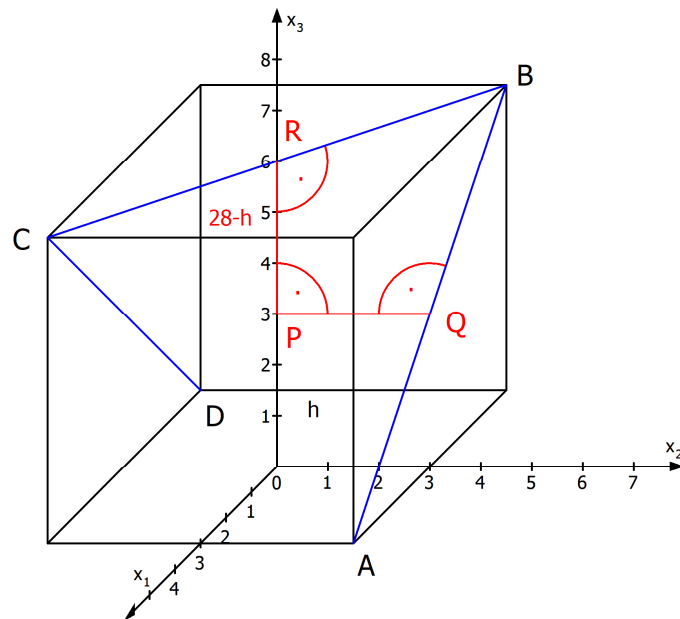
Polygon. Dann wäre A links und D rechts. Der Vektor ist dann $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

Von oben betrachtet ergibt sich ein umgedrehtes Z.



g) Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.



Der Punkt P liegt auf der x_3 -Achse.

Begründung von I:

Bei I ist ein Ausschnitt der Gerade durch die Punkte A und B beschrieben.

Durch die Einschränkung des Parameters $t \in [0, 1]$ werden alle Punkte beschrieben, die zwischen den Punkten A und B liegen.

Der Abstand von P zur Strecke $[AB]$ ist die Länge des Lots $[PQ]$ auf die Gerade AB . Q liegt dabei zwischen A und B .

Begründung von II:

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ muss senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ stehen, somit muss das Skalarprodukt der Vektoren gleich null ergeben.

Begründung von III:

Die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ muss gleich sein wie der Abstand des Punktes P von der Seite $[BC]$. Da die Höhe des Quaders 28 beträgt, ist dieser Abstand $28-h$.