

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Bayern

Prüfungsteil B Analytische Geometrie Aufgabengruppe 1

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Aufgabengruppe 1**a) 4 BE, b) 5 BE, c) 1 BE, d) 3 BE, e) 4 BE, f) 5 BE, g) 3 BE**Gegeben sind die Punkte $P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$ und $R(3|7|-17)$, die in der Ebene E liegen, sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $[PQ]$. Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist, und begründen Sie damit, dass die Strecke $[PQ]$ Durchmesser des Umkreises des Dreiecks PQR ist.

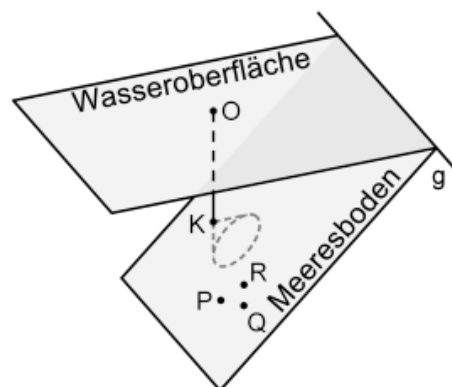
(zur Kontrolle: $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}$)

- b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Gerade g in E liegt.

(zur Kontrolle: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$)

- c) Begründen Sie ohne Rechnung, dass g in der x_1x_2 -Ebene liegt.

In einem Modell für einen Küstenabschnitt am Meer beschreibt die x_1x_2 -Ebene die horizontale Wasseroberfläche und die Gerade g die Uferlinie. Die Ebene E stellt im betrachteten Abschnitt den Meeresboden dar. Eine Boje schwimmt auf der Wasseroberfläche an der Stelle, die dem Koordinatenursprung O entspricht (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.



- d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Meeresboden gegenüber der Wasseroberfläche abfällt.

Ein Fotograf soll für ein Reisemagazin Unterwasserfotos aufnehmen.

- e) Der Fotograf schwimmt entlang der kürzestmöglichen Strecke von der Uferlinie aus zur Boje. Ermitteln Sie die Länge dieser Strecke.

Von der Boje aus taucht der Fotograf senkrecht bezüglich der Wasseroberfläche nach unten bis zu einer Stelle, deren Abstand zum Meeresboden genau drei Meter beträgt und im Modell durch den Punkt K dargestellt wird.

- f) Bestimmen Sie rechnerisch, welche Tiefe unter der Wasseroberfläche der Fotograf bei diesem Tauchvorgang erreicht.

- g) Drei kleine farbenfrohe Seesterne befinden sich am Meeresboden und werden im Modell durch die Punkte P, Q und R dargestellt. Der Fotograf bewegt sich für seine Aufnahmen von der Stelle aus, die im Modell durch den Punkt K beschrieben wird, parallel zum Meeresboden. Das Kameraobjektiv zeigt dabei senkrecht zum Meeresboden und hat ein kegelförmiges Sichtfeld mit einem Öffnungswinkel von 90° (vgl. Abbildung). Beurteilen Sie, ob der Fotograf auf diese Weise eine Stelle erreichen kann, an der er alle drei Seesterne gleichzeitig im Sichtfeld der Kamera sehen kann.

Lösungen**Analytische Geometrie: Aufgabengruppe 1**

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $[PQ]$.

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist, und begründen Sie damit, dass die Strecke $[PQ]$ Durchmesser des Umkreises des Dreiecks PQR ist.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0$$

Damit ist das Dreieck PQR bei R rechtwinklig.

Der Punkt R liegt daher auf dem Thaleskreis über der Strecke $[PQ]$, dessen Durchmesser $[PQ]$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Gerade g in E liegt.

$$\text{Normalenvektor von } E: \vec{n} = \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatenform: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen von Punkt $R(3|7|-17)$: $6 - 7 - 34 = -35 \Rightarrow d = -35$

Koordinatenform von E : $2x_1 - x_2 + 2x_3 = -35$

Überprüfung, ob die Gerade g in E liegt:

Einsetzen von g in E : $2(-12 + \lambda) - (11 + 2\lambda) + 2(0 + 0\lambda) = -35 \Leftrightarrow -35 = -35$

Es entsteht eine wahre Aussage.

Daher liegt die Gerade g in der Ebene E .

c) *Begründen Sie ohne Rechnung, dass g in der x_1x_2 -Ebene liegt.*

Da die x_3 -Koordinate des Stützvektors und des Richtungsvektors gleich 0 ist, liegt die Gerade g in der x_1x_2 -Ebene.

d) *Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Meeresboden gegenüber der Wasseroberfläche abfällt.*

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 48,2^\circ$$

e) *Ermitteln Sie die Länge dieser Strecke.*

Die Länge der Strecke entspricht dem Abstand der Gerade g vom Ursprung $O(0|0|0)$.

Aufstellen einer Hilfsebene H, die senkrecht zu g verläuft und durch den Ursprung verläuft:

Der Normalenvektor von H entspricht dem Richtungsvektor von g:

Ansatz für die Koordinatenform von H: $x_1 + 2x_2 = d$

Einsetzen von $O(0|0|0)$ ergibt $d = 0$

Ebene H: $x_1 + 2x_2 = 0$

Schnittpunktberechnung von g und H:

$$-12 + \lambda + 2(11 + 2\lambda) = 0 \Leftrightarrow 10 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Einsetzen von $\lambda = -2$ in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt (Lotfußpunkt) $L(-14|7|0)$.

$$\text{Abstand von g zu O: } |\overline{OL}| = \left| \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{196 + 49} = \sqrt{245} \approx 15,7$$

Der Abstand der Boje von der Küste beträgt ca. 15,7 Meter.

- f) Bestimmen Sie rechnerisch, welche Tiefe unter der Wasseroberfläche der Fotograf bei diesem Tauchvorgang erreicht.

Da der Fotograf vom Ursprung $O(0|0|0)$ aus senkrecht zur Wasseroberfläche nach unten taucht, hat der gesuchte Punkt die Koordinaten $K(0|0|u)$.

Der Punkt K soll von der Meeresbodenebene den Abstand 3 haben.

$$\text{HNF von E: } \frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35}{3} = 0$$

$$\text{Einsetzen von } K(0|0|k): d(K, E) = \frac{|2k + 35|}{3} = 3 \Leftrightarrow |2k + 35| = 9$$

$$1. \text{ Fall: } 2k + 35 = 9 \Leftrightarrow k = -13$$

$$2. \text{ Fall: } 2k + 35 = -9 \Leftrightarrow k = -22$$

Der Punkt $Z(0|0|-17,5)$ liegt auf der Ebene.

Das heißt, dass der Punkt $K(0|0|-13)$ oberhalb der Ebene liegt.

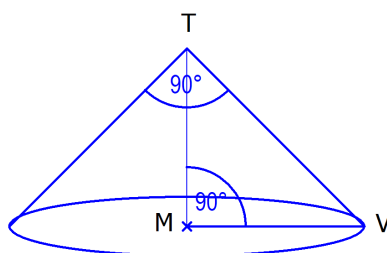
Für $k = -22$ würde der Punkt unterhalb der Ebene liegen und kommt daher als Lösung nicht in Betracht.

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $K(0|0|-13)$.

Der Taucher befindet sich in einer Tiefe von 13 m.

- g) Beurteilen Sie, ob der Fotograf auf diese Weise eine Stelle erreichen kann, an der er alle drei Seesterne gleichzeitig im Sichtfeld der Kamera sehen kann.

Skizze:



Befindet sich der Taucher im Punkt T, kann das Sichtfeld des Tauchers durch den obigen Kegel beschrieben werden.

Die Grundfläche des Kegels befindet sich in der Ebene E (Meeresboden).

Höhe des Kegels: $h = \overline{MT} = 3$

Das Dreieck MVT ist gleichschenkelig, da die Höhe h den Winkel bei T halbiert.

Somit gilt für den Radius des Kegels $r = \overline{MV} = 3$.

Der Durchmesser des Grundkreises ist 6.

Das Dreieck PQR ist rechtwinklig und hat laut Teilaufgabe a) einen Umkreis mit Durchmesser $3\sqrt{2}$.

Da $3 \cdot \sqrt{2} < 6$ ist, kann der Taucher alle drei Seesterne auf einem Bild aufnehmen.