

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Bayern

Prüfungsteil B Stochastik Aufgabengruppe 2

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Aufgabengruppe 2

Die SMV eines Gymnasiums initiierte im vergangenen Schuljahr die Aktionen „Baumpatenschaft“ und „Umweltwoche“.

Aufgabe 1: (a) 4 BE, b) 1 BE)

Mit einer Umfrage auf dem Schulfest wird der Bekanntheitsgrad der beiden Aktionen ermittelt. Von den Befragten kennt jeder Fünfte die Aktion „Baumpatenschaft“. 24 % der Befragten kennen keine der beiden Aktionen; die Aktion „Umweltwoche“ kennen 30 % der Befragten nicht.

Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

B: „Die Person kennt die Aktion ‚Baumpatenschaft‘.“

U: „Die Person kennt die Aktion ‚Umweltwoche‘.“

- a) Weisen Sie nach, dass die Ereignisse B und U stochastisch unabhängig sind.
- b) Geben Sie für den Fall, dass die ausgewählte Person die Aktion „Baumpatenschaft“ kennt, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie die Aktion „Umweltwoche“ nicht kennt.

Aufgabe 2: (a) 3 BE, b) 4 BE, c) 4 BE, d) 3 BE)

Um Geld für die beiden Aktionen einzunehmen, bietet die SMV auf dem Schulfest das Spiel „2022“ an. Bei dem Spiel werden zwei Glücksräder mit drei bzw. vier gleich großen Sektoren verwendet, die wie in Abbildung 1 beschriftet sind.

Für einen Einsatz von 3 € darf man jedes der beiden Glücksräder einmal drehen.

Für jede Ziffer 2, die auf den erzielten Sektoren steht, werden 2 € ausbezahlt.

Die Zufallsgröße Z beschreibt, wie oft die Ziffer 2 auf den erzielten Sektoren insgesamt vorkommt.

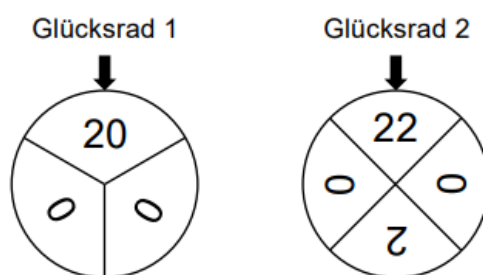


Abb. 1

- a) Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 .

K	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	p_1	p_2	$\frac{1}{12}$

(zur Kontrolle: $p_2 = \frac{1}{4}$)

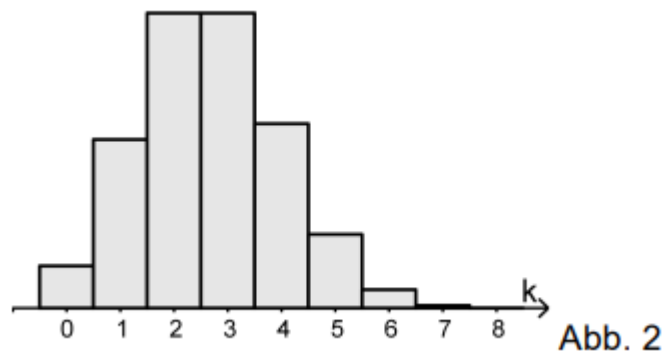
- b) Ermitteln Sie, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit der Erwartungswert der Einnahme für die beiden Aktionen 300 € beträgt.

Acht Personen spielen nacheinander jeweils einmal das Spiel „2022“.

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die SMV mehr als zweimal mindestens 4 € ausbezahlen muss.
- d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an die ersten drei Personen drei unterschiedliche Beträge ausbezahlt werden, die in der Summe 12 € ergeben.

Aufgabe 3: (a) 4 BE, b) 2 BE)

Die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 8$ und p_x besitzt die Standardabweichung $\frac{4}{3}$. In Abbildung 2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



- a) Ermitteln Sie den Wert des Parameters p_x .
- b) Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter $n = 8$ und $p_y = 1 - p_x$. Kennzeichnen Sie in Abbildung 2 eine Fläche, die die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 6)$ darstellt.

Lösungen**Stochastik: Aufgabengruppe 2****Aufgabe 1:**

- a) Weisen Sie nach, dass die Ereignisse B und U stochastisch unabhängig sind.

Die bekannten Werte werden in eine Vierfeldertafel eingetragen:

	B	$\bar{B}$	
U	0,14	0,56	0,7
$\bar{U}$	0,06	0,24	0,3
	0,2	0,8	1

$$P(U) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$$

$$P(U \cap B) = 0,14$$

Da die beiden Wahrscheinlichkeiten gleich sind, sind die Ereignisse U und B stochastisch unabhängig.

- b) Geben Sie für den Fall, dass die ausgewählte Person die Aktion „Baumpatenschaft“ kennt, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie die Aktion „Umweltwoche“ nicht kennt.

$$P_B(\bar{U}) = \frac{P(B \cap \bar{U})}{P(B)} = \frac{0,06}{0,2} = 0,3 = 30\%$$

Aufgabe 2:

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 .

Die Zufallsgröße Z nimmt den Wert 1 an, wenn nur einmal die Ziffer 2 vorkommt. Dies ist der Fall für die Kombinationen (20;0) und (0;2):

$$p_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Daraus folgt: } p_2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

- b) *Ermitteln Sie, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit der Erwartungswert der Einnahme für die beiden Aktionen 300 € beträgt.*

Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn pro Spiel **aus Sicht der SMV** an.

Es gilt:

$$P(Z = 0) = P(X = 3) = \frac{1}{3}$$

$$P(Z = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Z = 2) = P(X = -1) = \frac{1}{4}$$

$$P(Z = 3) = P(X = -3) = \frac{1}{12}$$

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$$

Pro Spiel gewinnt die SMV im Durchschnitt $\frac{5}{6}$ €.

Damit die SMV 300 € gewinnt muss das Spiel $\frac{300\text{€}}{\frac{5}{6}\text{€}} = 360$ mal durchgeführt werden.

- c) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die SMV mehr als zweimal mindestens 4 € ausbezahlen muss.*

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Spieler an, die mindestens 4 € ausgezahlt bekommen.

Wahrscheinlichkeit, dass einem Spieler mindestens 4 € ausgezahlt werden:

$$p = P(Z = 2) + P(Z = 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

X ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = \frac{1}{3}$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,468 = 0,532$$

- d) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an die ersten drei Personen drei unterschiedliche Beträge ausbezahlt werden, die in der Summe 12 € ergeben.*

Die Summe der drei unterschiedlichen Auszahlungen soll 12€ betragen.

Dies geht nur, wenn die drei Auszahlungen 2€ und 4€ und 6€ betragen.

Die Auszahlungen können bei 3 Personen auf $3! = 6$ verschiedene Reihenfolgen auftreten.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 6 = \frac{1}{24}$.

Aufgabe 3:

a) Ermitteln Sie den Wert des Parameters p_X .

Es gilt $n = 8$ und $\sigma = \frac{4}{3}$.

Für eine Binomialverteilung gilt: $\sigma = \sqrt{n \cdot p_X \cdot (1 - p_X)}$

$$\frac{4}{3} = \sqrt{8 \cdot p_X \cdot (1 - p_X)}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9} = 8 \cdot p_X \cdot (1 - p_X)$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9} = 8p_X - 8p_X^2$$

$$\Rightarrow 72p_X^2 - 72p_X + 16 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } p_{X1,2} = \frac{72 \pm \sqrt{72^2 - 4 \cdot 72 \cdot 16}}{2 \cdot 72} = \frac{72 \pm 24}{144} \quad p_X = \frac{2}{3} \text{ oder } p_X = \frac{1}{3}$$

Für $p_X = \frac{2}{3}$ ist der Erwartungswert $E(X) = n \cdot p_X = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

Für $p_X = \frac{1}{3}$ ist der Erwartungswert $E(X) = n \cdot p_X = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

Die höchsten Säulen sind im Diagramm bei $X = 2$ und $X = 3$.

Der Erwartungswert muss daher in der Nähe dieser Säulen liegen.

Daher kommt nur $E(X) = \frac{8}{3}$ in Betracht und es gilt $p_X = \frac{1}{3}$.

b) Kennzeichnen Sie in Abbildung 2 eine Fläche, die die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 6)$ darstellt.

Bei den Zufallsgrößen X und Y sind Treffer und Nieten vertauscht.

Aus Sicht von X bedeutet $P(Y \geq 6)$ mindestens 6 Nieten, also höchstens 2 Treffer, also $P(Y \geq 6) = P(X \leq 2)$.

