

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Bayern

Prüfungsteil B Stochastik Aufgabengruppe 1

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Aufgabengruppe 1

Um die Wirksamkeit eines Pflanzenschutzmittels gegen Pilzbefall nachzuweisen, wurden zahlreiche Versuche durchgeführt, bei denen landwirtschaftliche Nutzpflanzen zunächst mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht wurden. Im Mittel sind dabei 5% der Pflanzen von Pilzen befallen worden.

Aufgabe 1: (a) 6 BE, b) 4 BE, c) 4 BE, d) 3 BE

Bei einem weiteren solchen Versuch mit n Pflanzen beschreibt die Zufallsgröße X_n die Anzahl der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass X_n binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p = 0,05$.

- a) Es werden 15 Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
- E_1 : „Keine der Pflanzen wird von Pilzen befallen.“
 E_2 : „Höchstens zwei Pflanzen werden von Pilzen befallen.“
 E_3 : „12 oder 13 Pflanzen bleiben ohne Pilzbefall.“
- b) Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n , für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99% beträgt.
- c) Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden.
- d) Allgemein gilt für eine Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgende Ungleichung für $k > 0$:

$$P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$.

Aufgabe 2: (a) 4 BE, b) 4 BE)

Um die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen einen nur in den Tropen auftretenden Pilz zu untersuchen, wurde ein Experiment mit 150 Pflanzen durchgeführt. Dabei wurden 70 % der Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend alle 150 Pflanzen mit den Sporen des tropischen Pilzes besprüht.

Am Ende des Experiments war die Anzahl der unbehandelten Pflanzen ohne Pilzbefall dreimal so groß wie die Anzahl x der behandelten Pflanzen mit Pilzbefall. Insgesamt wurden 19 Pflanzen vom tropischen Pilz befallen. Aus den 150 Pflanzen wird eine Pflanze zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S: „Die Pflanze wurde mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt.“

T: „Die Pflanze wurde vom tropischen Pilz befallen.“

- a) Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel.
(zur Kontrolle: $x = 13$)
- b) Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\bar{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann.

Lösungen**Stochastik: Aufgabengruppe 1****Aufgabe 1:**

a) X_{15} ist binomialverteilt mit $n = 15$ und $p = 0,05$.

$$P(E_1) = P(X = 0) = \binom{15}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{15} \approx 0,463 = 46,3\%$$

$$P(E_2) = P(X \leq 2) \approx 0,964 = 96,4\%$$

$$P(E_3) = P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0,135 + 0,031 = 0,166 = 16,6\%$$

Hinweis: 12 oder 13 Pflanzen ohne Pilzbefall bedeuten 2 oder 3 Pflanzen mit Pilzbefall.

b) *Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n , für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99% beträgt.*

Es handelt sich um eine 3-mal-mindestens-Aufgabe:

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,05$.

Bedingung: $P(X \geq 1) \geq 0,99$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow 0,95^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,95) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,95)} \approx 89,8$$

n muss mindestens 90 betragen.

c) *Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden.*

X ist binomialverteilt mit $n = 400$ und $p = 0,05$.

Es gilt $E(X_{400}) = \mu = n \cdot p = 400 \cdot 0,05 = 20$ und

$$\text{Var}(X_{400}) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 400 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 19 \text{ bzw. } \sigma = \sqrt{19} \approx 4,36$$

$$\mu - \sigma = 20 - \sqrt{19} \approx 15,64$$

Daraus ergibt sich als kleinstmögliche relative Häufigkeit $\frac{16}{400} = \frac{1}{25}$.

$$\mu + \sigma = 20 + \sqrt{19} \approx 24,36$$

Daraus ergibt sich als größtmögliche relative Häufigkeit $\frac{24}{400} = \frac{3}{50}$.

d) *Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$*

$$\text{Für } k = 2 \text{ gilt: } P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0,75$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgröße X innerhalb der doppelten Standardabweichung um den Erwartungswert liegt, beträgt mindestens 75%.

Aufgabe 2:

a) *Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel.*

Eintrag der Werte in einer Vierfeldertafel:

	S	$\bar{S}$	
T	x	19-x	19
$\bar{T}$	105-x	3x	131
	$0,7 \cdot 150 = 105$	45	150

$$\text{Es gilt: } 105 - x + 3x = 131 \Leftrightarrow x = 13.$$

b) Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\bar{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann.

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{\frac{13}{150}}{\frac{105}{150}} = \frac{13}{105} \approx 0,124$$

$$P_{\bar{S}}(T) = \frac{P(\bar{S} \cap T)}{P(\bar{S})} = \frac{\frac{6}{150}}{\frac{45}{150}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} \approx 0,133$$

Der Anteil der vom tropischen Pilz befallenen Pflanzen ist unter den Pflanzen, die mit einem Pflanzenschutzmittel behandelt wurden nur geringfügig kleiner als unter den Pflanzen, die nicht mit einem Pflanzenschutzmittel behandelt wurden. Daher liegt wenn überhaupt nur eine geringe Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels vor.