

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Bayern

Prüfungsteil B Analysis Aufgabengruppe 2

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Aufgabengruppe 1**Aufgabe 1: (a) 4 BE, b) 2 BE, c) 5 BE, d) 3 BE, e) 3 BE**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$.

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

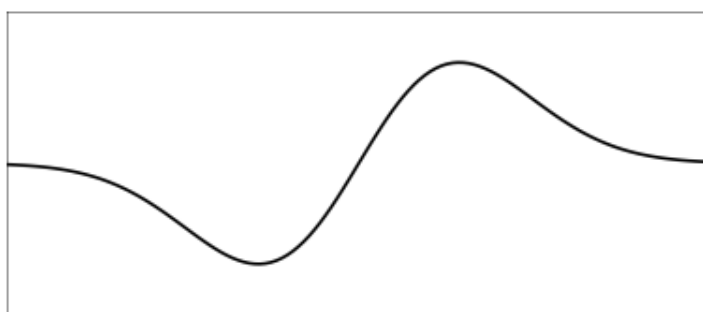


Abb. 1

a) Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f , dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \rightarrow +\infty$ an.

b) Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f .

(zur Kontrolle: $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$)

c) Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f . Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.

d) Ist g' die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g , so gilt

$$\text{bekanntlich } \int_u^v g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = \left[e^{g(x)} \right]_u^v.$$

Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int_0^1 f(x) dx$.

e) Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:

Für jede Stammfunktion F von f und für jede reelle Zahl $w > 2022 > \text{gilt}$

$$F(w) - F(0) \approx \int_0^{2022} f(x) dx$$

Aufgabe 2: (a) 3 BE, b) 2 BE, c) 3 BE, d) 3 BE, e) 3 BE, f) 3 BE, g) 6 BE)

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$f_a : x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}} \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

- a) Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt (1|1) enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an.
- b) Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y -Achse an.
- c) Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a , a_1 und a_2 :
- $f_a(0) = 0$
 - $f'_a(0) = f'_0(0)$
 - $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ oder } x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

- d) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist:

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x -Richtung als auch in y -Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.

II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

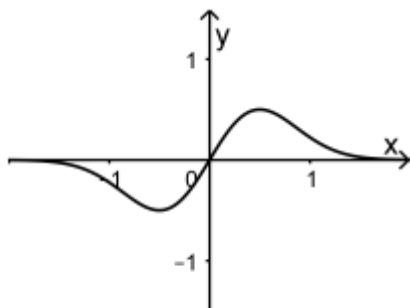


Abb. 2

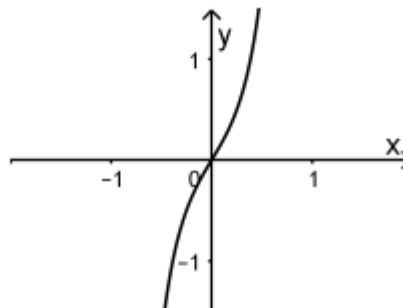


Abb. 3

Die Extremstellen von f_a stimmen mit den Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ überein.

- e) Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe.
- f) Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt.
- g) Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $(v \mid f_a(v))$ des Graphen von f_a , der Punkt $(0 \mid \frac{2}{v})$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v \mid 0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a , für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 2****Aufgabe 1:**

- a) Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f , dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\text{Es gilt } f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} = -f(x)$$

Der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung.

Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \rightarrow +\infty$ an.

$$\text{Nullstelle: } f(x) = 0$$

$$x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} = 0 \quad \text{Gleichung ist nicht lösbar}$$

Die einzige Nullstelle ist $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} = 0, \text{ da die e-Funktion gegen Null strebt.}$$

- b) Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f .

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} \cdot (-x) = e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2)$$

- c) Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f .

Zunächst wird geprüft, wo das Schaubild von f eine waagrechte Tangente besitzt.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2) \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} = 0 \quad \text{Gleichung ist nicht lösbar}$$

$$\text{Gleichung II): } 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Kontrolle mit Vorzeichenwechsel:

Intervall $]-\infty; -1[$: Test mit $x = -2$ ergibt $f'(-2) < 0$ streng monoton fallend

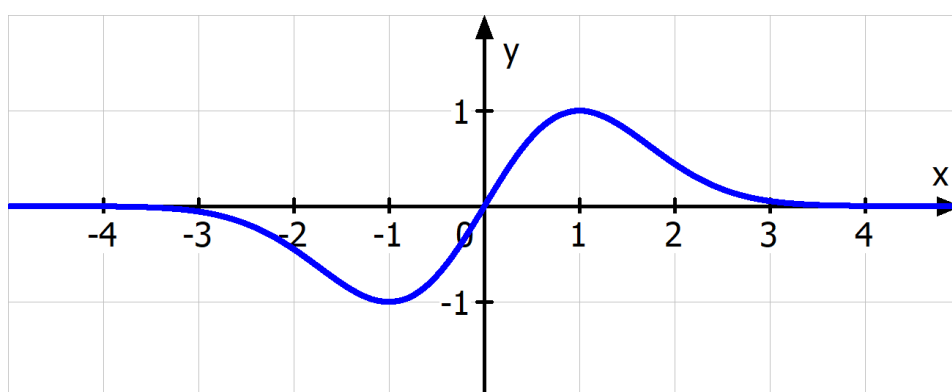
Intervall $]-1; 1[$: Test mit $x = 0$ ergibt $f'(0) > 0$ streng monoton wachsend

Intervall $]1; +\infty[$: Test mit $x = 2$ ergibt $f'(2) < 0$ streng monoton fallend

Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.

Es gilt $f(1)=1$ und $f(-1)=-1$.

Das Schaubild besitzt den Hochpunkt $H(1|1)$ und den Tiefpunkt $T(-1|-1)$.



d) Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int_0^1 f(x) dx$.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} \right]_0^1 = -e^0 - (-e^{\frac{1}{2}}) = e^{0.5} - 1$$

e) Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch.

$$\text{Es gilt } F(w) - F(0) = \int_0^w f(x) dx$$

$$\text{Daraus folgt } \int_0^w f(x) dx \approx \int_0^{2022} f(x) dx \text{ für } w > 2022$$

Die Fläche, die vom Graphen von f , der Geraden $x = w$ und der x -Achse eingeschlossen wird, nimmt für $w > 2022$ nahezu nicht mehr zu, da sich der Graph der waagrechten Asymptote annähert.

Aufgabe 2:

- a) Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt $(1|1)$ enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an.

Bedingung: $f_a(1) = 1$

$$1 = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot 1^2 + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = \ln(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

Genau ein Graph der Schar enthält den Punkt $(1|1)$, nämlich der Graph von f_1 .

- b) Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y -Achse an.

$$f_0(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}0^2 + \frac{1}{2}} = x \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

Die Gerade hat die Steigung $m = e^{\frac{1}{2}}$ und verläuft durch den Ursprung $(0|0)$.

- c) $f_a(0) = 0$:

Alle Graphen der Schar gehen durch den Ursprung $(0|0)$

$$f'_a(0) = f'_0(0):$$

Alle Graphen der Schar haben im Ursprung die Steigung $e^{\frac{1}{2}}$ (siehe Teilaufgabe b)

$$f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ oder } x = 0:$$

Zwei unterschiedliche Graphen der Schar schneiden sich nur an der Stelle $x = 0$.

- d) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist:

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x -Richtung als auch in y -Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

Streckung mit dem Faktor k in x -Richtung und in y -Richtung:

$$k \cdot f_a\left(\frac{1}{k}x\right) = k \cdot \left(\frac{1}{k}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{k}x\right)^2 + \frac{1}{2}} = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{k^2}x^2 + \frac{1}{2}}$$

Diese Funktion gehört auch zur Schar. Die bisherige Konstante a im Exponenten der e -Funktion wird durch die Konstante $\frac{a}{k^2}$ ersetzt.

- e) Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe.

$$a \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{a}$$

Die Gleichung hat keine Lösung für $a \leq 0$.

In diesem Fall hat der Graph keine Extrempunkte (Gruppe II).

Für $a > 0$ hat die Gleichung zwei Lösungen $x = \pm \sqrt{\frac{1}{a}}$.

Der Graph hat dann zwei Extrempunkte (Gruppe I).

- f) Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt.

Gesucht ist die Gleichung der Ortskurve.

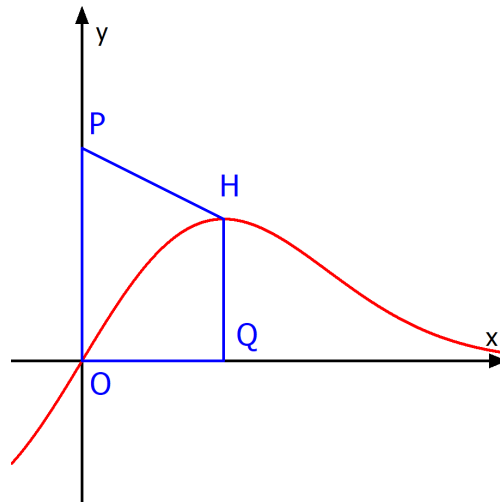
Berechnung der Koordinaten der Extrempunkte:

$$f_a\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}} \quad \text{also } A\left(\sqrt{\frac{1}{a}} \mid \sqrt{\frac{1}{a}}\right)$$

$$f_a\left(-\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a\left(-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{a}} \quad \text{also } B\left(-\sqrt{\frac{1}{a}} \mid -\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$$

Die Extrempunkte A und B haben die gleiche x-Koordinate und y-Koordinate. Somit liegen die Punkte A und B auf der Winkelhalbierenden $y = x$.

- g) Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a , für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat.



Das Viereck OQHP ist ein Trapez.

Koordinaten der Eckpunkte:

$H(v \mid v)$; $P(0 \mid \frac{2}{v})$, $Q(v \mid 0)$ und $O(0 \mid 0)$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OP} + \overline{QH}) \cdot \overline{OQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} + v \right) \cdot v = 1 + \frac{1}{2} v^2$$

Es gilt $v = \sqrt{\frac{1}{a}}$ gemäß Teilaufgabe e).

$$\text{Bedingung: } 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{a}} \right)^2 = 49 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2a} = 49 \Leftrightarrow 2a = \frac{1}{48} \Leftrightarrow a = \frac{1}{96}$$