

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Bayern

Prüfungsteil B Analysis Aufgabengruppe 1

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2022

Aufgabengruppe 1

Aufgabe: (a) 2 BE, b) 5 BE, c) 3 BE, d) 5 BE, e) 4 BE, f) 4 BE, g) 2 BE, h) 5 BE, i) 1 BE, j) 5 BE, k) 4 BE)

Gegeben ist die in $[0;10]$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$.

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

- a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f .
(zur Kontrolle: 0 und 10)

- b) Der Graph G_f besitzt in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts und begründen Sie, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$; y-Koordinate des Hochpunkts: 10)

- c) Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt. Einer der folgenden Terme ist ein Term der zweiten Ableitungsfunktion f'' von f . Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f'' zu berechnen.

$$\text{I} \quad f''(x) = \frac{50}{(x^2 - 10x) \cdot \sqrt{10x - x^2}}$$

$$\text{II} \quad f''(x) = \frac{50}{(10x - x^2) \cdot \sqrt{10x - x^2}}$$

- d) Weisen Sie nach, dass für $0 \leq x \leq 5$ die Gleichung $f(5-x) = f(5+x)$ erfüllt ist, indem Sie die Terme $f(5-x)$ und $f(5+x)$ geeignet umformen.
Begründen Sie damit, dass der Graph G_f symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 5$ ist.

- e) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich des Terms $f'(x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$ an.

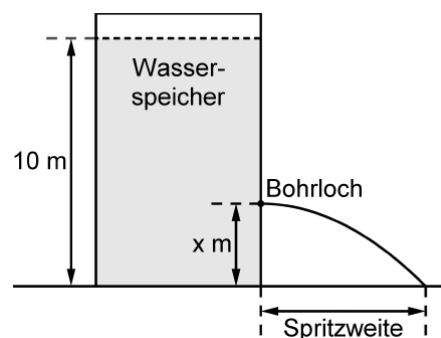
Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

- f) Geben Sie $f(8)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

- g) Betrachtet wird die Tangente an G_f im Punkt $(2|f(2))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

- h) Von den Eckpunkten des Rechtecks ABCD liegen der Punkt A($s|0$) mit $s \in]0;5[$ sowie der Punkt B auf der x-Achse, die Punkte C und D liegen auf G_f .
Das Rechteck besitzt somit die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ als Symmetrieachse. Zeigen Sie, dass die Diagonalen dieses Rechtecks jeweils die Länge 10 besitzen.

Ein Wasserspeicher hat die Form eines geraden Zylinders und ist bis zu einem Füllstand von 10 m über dem Speicherboden mit Wasser gefüllt. Bohrt man unterhalb des Füllstands ein Loch in die Wand des Wasserspeichers, so tritt unmittelbar nach Fertigstellung der Bohrung Wasser aus, das in einer bestimmten Entfernung zur Speicherwand auf den Boden trifft. Diese Entfernung wird im Folgenden Spritzweite genannt (vgl. Abbildung). Die Abhängigkeit der Spritzweite von der Höhe des Bohrlochs wird durch die in den bisherigen Teilaufgaben betrachtete Funktion f modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Höhe des Bohrlochs über dem Speicherboden in Metern und $f(x)$ die Spritzweite in Metern.



- i) Der Graph G_f verläuft durch den Punkt $(3,6|9,6)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an.
- j) Berechnen Sie die Höhen, in denen das Loch gebohrt werden kann, damit die Spritzweite 6 m beträgt. Geben Sie zudem die Höhe an, in der das Loch gebohrt werden muss, damit die Spritzweite maximal ist.
- k) Es wird nun ein bestimmtes Bohrloch im Wasserspeicher betrachtet. Durch das Abfließen verringert sich das Volumen des Wassers im Speicher in Abhängigkeit von der Zeit. Die Funktion $g: t \mapsto 0,25t - 25$ mit $0 \leq t \leq 100$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung dieser Volumenänderung. Dabei ist t die seit der Fertigstellung des Bohrlochs vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Speicher in Litern pro Sekunde. Berechnen Sie das Volumen des Wassers in Litern, das innerhalb der ersten Minute nach Fertigstellung des Bohrlochs aus dem Behälter abfließt.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 1**

a) *Bestimmen Sie die Nullstellen von f.*

Bedingung Nullstellen: $f(x) = 0$

$$2 \cdot \sqrt{10x - x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{10x - x^2} = 0 \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow 10x - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (10 - x) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $10 - x = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Probe durch Einsetzen der Lösungen die Ausgangsgleichung ergibt eine wahre Aussage.

Hinweis: Probe ist bei einer Wurzelgleichung notwendig

b) *Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts und begründen Sie, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.*

Notwendige Bedingung für Hochpunkt: $f'(x) = 0$

$$\text{Es gilt } f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{10x - x^2}} \cdot (10 - 2x) = \frac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}}$$

$$\frac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Da es nur eine Lösung gibt, gibt es nur einen Punkt mit einer waagrechten Tangente.

Ein Hochpunkt liegt vor, wenn f' beim Durchgang bei $x = 5$ das Vorzeichen wechselt von $+$ nach $-$.

$$\text{Es gilt } f'(4) = \frac{2}{\sqrt{24}} > 0 \text{ und } f'(6) = \frac{-2}{\sqrt{24}} < 0.$$

Damit ist gezeigt, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

Wegen $f(5) = 10$ lautet der Hochpunkt $H(5|10)$.

- c) Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f'' zu berechnen.

Da der Graph von f rechtsgekrümmt ist, gilt $f''(x) < 0$

Test für $x = 5$:

$$\text{Term I) } f''(5) = \frac{50}{-25 \cdot \sqrt{25}} < 0$$

$$\text{Term II): } f''(5) = \frac{50}{25 \cdot \sqrt{25}} > 0$$

Daher stellt Term I) die 2. Ableitung von f dar.

- d) Weisen Sie nach, dass für $0 \leq x \leq 5$ die Gleichung $f(5-x) = f(5+x)$ erfüllt ist, indem Sie die Terme $f(5-x)$ und $f(5+x)$ geeignet umformen.

$$f(5-x) = 2 \cdot \sqrt{10(5-x) - (5-x)^2} = 2 \cdot \sqrt{50 - 10x - 25 + 10x - x^2} = 2 \cdot \sqrt{-x^2 + 25}$$

$$f(5+x) = 2 \cdot \sqrt{10(5+x) - (5+x)^2} = 2 \cdot \sqrt{50 + 10x - 25 - 10x - x^2} = 2 \cdot \sqrt{-x^2 + 25}$$

Damit gilt $f(5-x) = f(5+x)$.

Begründen Sie damit, dass der Graph G_f symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 5$ ist.

Der y -Wert aller Punkte in gleichem Abstand von $x = 5$ (x -Wert des Hochpunktes) ist immer gleich. Daher ist der Graph symmetrisch zur Gerade $x = 5$.

- e) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich des Terms $f'(x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$ an.

Der Term unter der Wurzel muss immer positiv sein.

Das Schaubild der Funktion $y = 10x - x^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.

Diese Parabel ist zwischen ihren Nullstellen $x = 0$ und $x = 10$ oberhalb der x -Achse und damit positiv.

$$D_{f'} =]0;10[$$

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}} \rightarrow +\infty$$

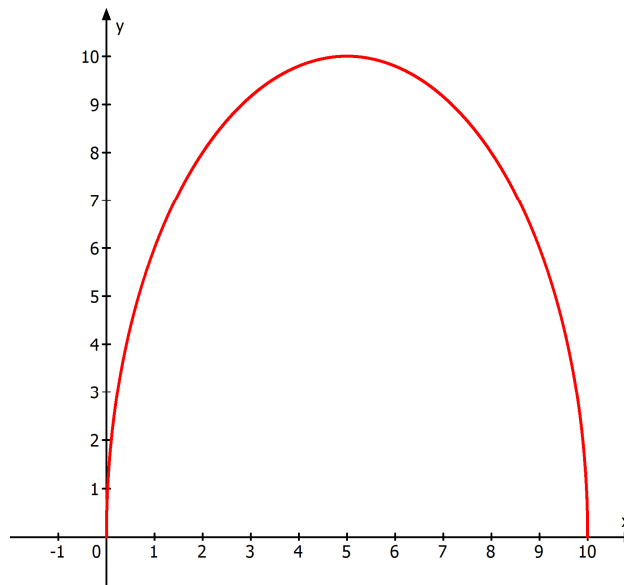
Begründung: Der Zähler strebt gegen 10 und der Nenner strebt gegen 0-

Geometrische Interpretation: Das Schaubild von f hat im Ursprung eine senkrechte Tangente (mit einer unendlich großen Steigung).

- f) Geben Sie $f(8)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

$$f(8) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot 8 - 8^2} = 2 \cdot 4 = 8$$

Skizze unter Berücksichtigung des Hochpunktes, der Symmetrie zur Geraden $x = 5$ und der Nullstellen und der senkrechten Tangente im Ursprung.

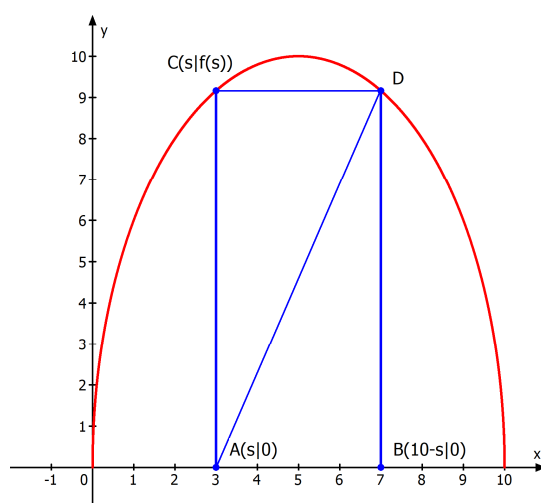


- g) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x -Achse schneidet.

Berechnung der Tangentensteigung: $f'(2) = \frac{6}{\sqrt{16}} = 1,5$

$$\tan \alpha = 1,5 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1,5) \approx 56,3^\circ$$

h) Zeigen Sie, dass die Diagonalen dieses Rechtecks jeweils die Länge 10 besitzen.



Länge des Rechtecks: $\overline{AB} = 10 - s - s = 10 - 2s$

Höhe des Rechtecks: $\overline{AC} = f(s) - 0 = 2 \cdot \sqrt{10s - s^2}$

Berechnung der Länge der Diagonale mit dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{AD} = \sqrt{(10 - 2s)^2 + \left(2 \cdot \sqrt{10s - s^2}\right)^2} = \sqrt{100 - 40s + 4s^2 + 4(10s - s^2)} = \sqrt{100} = 10$$

i) Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an.

Bei einer Höhe des Bohrlochs von 3,6 m beträgt die Spritzweite 9,6 m.

j) Berechnen Sie die Höhen, in denen das Loch gebohrt werden kann, damit die Spritzweite 6 m beträgt.

$$f(x) = 6:$$

$$2 \cdot \sqrt{10x - x^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{10x - x^2} = 3 \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow 10x - x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 10x - 9 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{-2} = \frac{-10 \pm 8}{-2} \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 9$$

Das Loch kann in 1 m oder in 9 m Höhe gebohrt werden.

Geben Sie zudem die Höhe an, in der das Loch gebohrt werden muss, damit die Spritzweite maximal ist.

Die Funktion f hat den Hochpunkt $H(5|10)$.

Wird das Loch in 5 m Höhe gebohrt, so ist die Spritzweite maximal (!0 m).

- k) Berechnen Sie das Volumen des Wassers in Litern, das innerhalb der ersten Minute nach Fertigstellung des Bohrlochs aus dem Behälter abfließt.

$$\int_0^{60} (0,25t - 25)dt = \left[\frac{1}{8}t^2 - 25t \right]_0^{60} = \frac{1}{8} \cdot 60^2 - 25 \cdot 60 = -1050$$

In der ersten Minute sind 1050 Liter abgeflossen.