

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Bayern

Prüfungsteil A Analysis Aufgabengruppe 2

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2022

Analysis: Aufgabengruppe 2**Aufgabe 1: (a) 2 BE, b) 3 BE**

Gegeben ist die Funktion f mit $g: x \mapsto \frac{2x^2}{x^2 - 9}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g .

- a) Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an.
- b) Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt.

Aufgabe 2: (a) 2 BE, b) 3 BE

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F , wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_F von F .

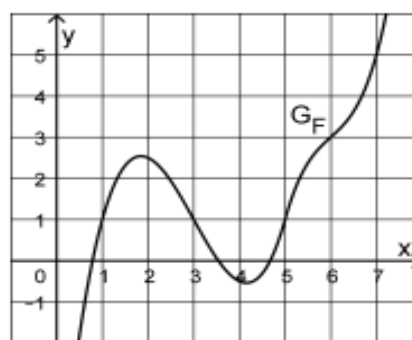


Abb. 1

- a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x) dx$.
- b) Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 1.

Aufgabe 3: (a) 2 BE, b) 3 BE

- a) Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln(2x - 3)$ mit Definitionsmenge $D_h = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der Ableitungsfunktion von h an.

b)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f .

Betrachtet wird die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge D_g .

Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x , für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.

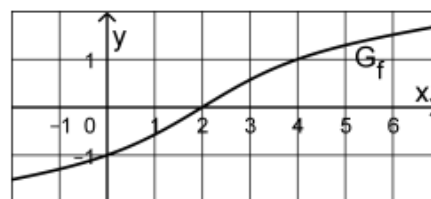


Abb. 2

Aufgabe 4: (a) 1 BE, b) 4 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- a) Zeigen Sie, dass $f'_a(0) = -a$ gilt.
- b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0 \mid f_a(0))$.
Bestimmen Sie diejenigen Werte von a , für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 2****Aufgabe 1:**

- a) Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an.

In der Definitionsmenge sind alle Zahlen enthalten, für die der Nenner nicht Null wird: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$\text{Waagrechte Asymptote: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1 - \frac{9}{x^2}} = 2$$

$$\text{Gleichung der waagrechten Asymptote: } y = 2$$

Hinweis: Die Gleichung der Asymptote kann auch so begründet werden, dass der Zählergrad und Nennergrad des Funktionsterm gleich groß ist und die Zahlen vor dem höchsten Grad dividiert werden.

- b) Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt.

$$\text{Bedingung für waagrechte Tangente: } g'(x) = 0$$

$$g'(x) = \frac{4x \cdot (x^2 - 9) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-36x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -36x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Da es nur eine Lösung gibt, gibt es nur einen Punkt mit einer waagrechten Tangente.

Aufgabe 2:

- a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x) dx$.

$$\int_1^7 f(x) dx = [F(x)]_1^7 = F(7) - F(1) = 5 - 1 = 4$$

- b) Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 1.

Es gilt $f(1) = F'(1)$.

Gesucht ist die Steigung der Tangente an das Schaubild von F .

Durch das Einzeichnen der Tangente und Ablesen der Steigung mit einem Steigungsdreieck ergibt sich $m \approx 4 = f(1)$

Aufgabe 3: (a) 2 BE, b) 3 BE)

- a) Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der Ableitungsfunktion von h an.

Nullstelle von h : $h(x) = 0$

$$\ln(2x - 3) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Ableitungsfunktion: } h'(x) = \frac{1}{2x-3} \cdot 2 = \frac{2}{2x-3}$$

- b) Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x , für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.

Bedingung für die Definitionsmenge von g : $f(x) > 0$

Aus der Abbildung 2 folgt daraus $x > 2$.

$$D_g =]2; +\infty[$$

$$\text{Es gilt: } g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$g'(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = f'(x) \Rightarrow f'(x) \cdot \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $f'(x) = 0$ Gleichung ist nicht lösbar, da f streng monoton wachsend

$$\text{Gleichung II): } 1 - \frac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow x = 4 \quad \text{gemäß Abbildung 2}$$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass $f'_a(0) = -a$ gilt.

Es gilt $f'_a(x) = -a \cdot e^{-x}$. Daraus folgt $f'_a(0) = -a \cdot e^0 = -a$.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a , für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x -Achse in einem Punkt schneidet, dessen x -Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Bedingung für eine positive Steigung: $f'_a(0) = -a > 0 \Rightarrow a < 0$

Gleichung der Tangente im Punkt $(0 | f_a(0))$: $y = f'_a(0) \cdot (x - 0) + f_a(0)$

Es gilt $f_a(0) = a + 3$.

Tangentengleichung: $y = -a \cdot (x - 0) + a + 3 \Rightarrow y = -ax + a + 3$

Nullstelle der Tangente: Setze $y = 0$

$$0 = -ax + a + 3 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{3}{a}$$

Bedingung: $1 + \frac{3}{a} > \frac{1}{2} \quad | \cdot a$ (wobei $a < 0$ ist)

$$\Leftrightarrow a + 3 < \frac{1}{2}a$$

$$\Leftrightarrow a < -6$$

Beide Bedingungen sind erfüllt für $a < -6$.