

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Bayern

**Prüfungsteil A Analysis
Aufgabengruppe 1**

**Hilfsmittel: keine
allgemeinbildende Gymnasien**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2022

Analysis: Aufgabengruppe 1**Aufgabe 1: (a) 2 BE, b) 3 BE)**

a) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f .

Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an.

b) Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y -Achse im Punkt $(0|4)$.

Aufgabe 2: (a) 2 BE, b) 3 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion

$$g: x \mapsto \frac{4}{x}.$$

Abbildung 1 zeigt den Graphen von g .

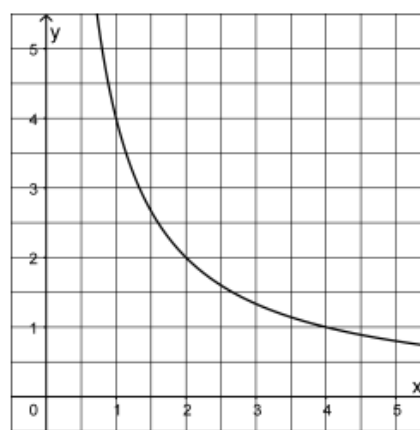


Abb. 1

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e g(x) dx$.

b) Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1;4]$ überein.

Aufgabe 3: (a) 2 BE, b) 3 BE)

Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$.

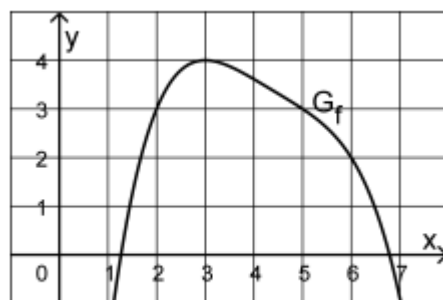


Abb. 2

- a) Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.
- b) Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

Aufgabe 4: (a) 1 BE, b) 4 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Zeigen Sie, dass $f'_a(0) = -a$ gilt.
- b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0 | f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a , für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x -Achse in einem Punkt schneidet, dessen x -Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 1****Aufgabe 1:**

a) Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an.

Die Definitionsmenge enthält alle Zahlen, bei denen der Nenner nicht Null wird.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Nullstellen von f : $f(x) = 0$

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + 2) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

b) Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y -Achse im Punkt $(0|4)$.

Möglich ist z.B. folgender Funktionsansatz: $h(x) = \frac{a}{x^2 + 1} + 3$

Einsetzen von $(0|4)$: $4 = \frac{c}{0^2 + 1} + 3 \Leftrightarrow c = 1$

Eine mögliche Funktionsgleichung wäre $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + 3$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e g(x) dx$.

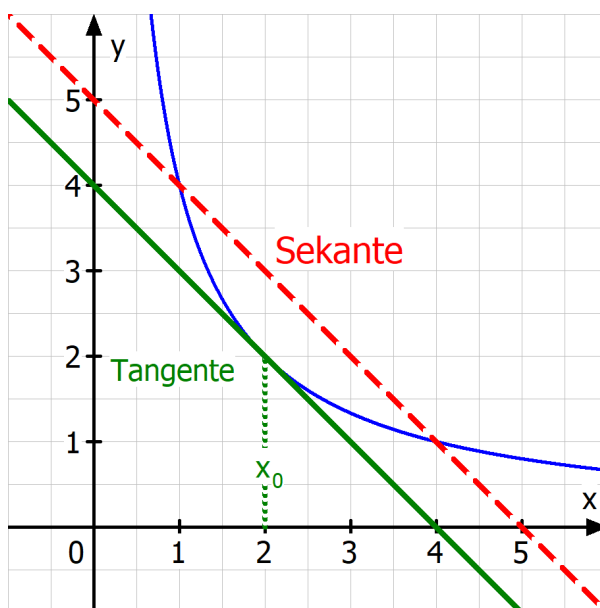
$$\int_1^e g(x) dx = \int_1^e \frac{4}{x} dx = [4 \cdot \ln |x|]_1^e = 4 \ln(e) - 4 \ln(1) = 4$$

b) Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt:

Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1;4]$ überein.

$$\text{Mittlere Änderungsrate im Intervall } [1;4]: m_{\text{Sekante}} = \frac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \frac{1 - 4}{4 - 1} = -1$$

Die Sekante muss nun parallel so verschoben werden, dass die Gerade eine Tangente an das Schaubild von g darstellt.



Es gilt $x_0 = 2$.

Aufgabe 3:

- a) Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.

Aus der Abbildung ergibt sich: $f(6) = 2$

$$g(6) = f(f(6)) = f(2) = 3$$

- b) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

Der Graph von g hat eine waagrechte Tangente, wenn $g'(x) = 0$ gilt.

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt:

Gleichung I): $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ (dort besitzt das Schaubild von f einen Hochpunkt)

Gleichung II): $f'(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow x_2 = 2$ oder $x_3 = 5$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass $f'_a(0) = -a$ gilt.

Es gilt $f'_a(x) = -a \cdot e^{-x}$. Daraus folgt $f'_a(0) = -a \cdot e^0 = -a$.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a , für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x -Achse in einem Punkt schneidet, dessen x -Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Bedingung für eine positive Steigung: $f'_a(0) = -a > 0 \Rightarrow a < 0$

Gleichung der Tangente im Punkt $(0 | f_a(0))$: $y = f'_a(0) \cdot (x - 0) + f_a(0)$

Es gilt $f_a(0) = a + 3$.

Tangentengleichung: $y = -a \cdot (x - 0) + a + 3 \Rightarrow y = -ax + a + 3$

Nullstelle der Tangente: Setze $y = 0$

$$0 = -ax + a + 3 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{3}{a}$$

Bedingung: $1 + \frac{3}{a} > \frac{1}{2} \quad | \cdot a$ (wobei $a < 0$ ist)

$$\Leftrightarrow a + 3 < \frac{1}{2}a$$

$$\Leftrightarrow a < -6$$

Beide Bedingungen sind erfüllt für $a < -6$.