

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Bayern

Prüfungsteil A Analysis Aufgabengruppe 1

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2022

Analysis: Aufgabengruppe 1**Aufgabe 1: (4 BE)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{2x+1}$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f .

Aufgabe 2: (a) 3 BE, b) 3 BE)

a) Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g . Geben Sie D_g und alle Nullstellen von g an.

b) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$.
Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist.

Aufgabe 3: (a) 2 BE, b) 3 BE)

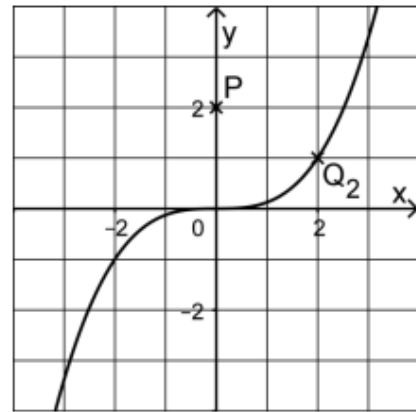
Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

a) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von f ist.

b) Der Graph von f schließt mit der x -Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$ mit $b > 1$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b , für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat.

Aufgabe 4: (a) 2 BE, b) 3 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ sowie die Punkte $Q_a(a | f(a))$ für $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Punkte $P(0|2)$ und Q_2



- a) Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a .

(zur Kontrolle: $m_a = \frac{a^3 - 16}{8a}$)

- b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q_a wird mit t_a bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 1****Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{2x+1}$.

Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist.

f ist umkehrbar, wenn sie streng monoton wachsend oder fallend ist.

Kontrolle der Monotonie: Es gilt $f'(x) = 2e^{2x+1}$.

Da $f'(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist die Funktion f streng monoton wachsend.

Damit ist f umkehrbar.

Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f .

Es gilt $y = e^{2x+1}$

Vertauschung der Variablen und nach y auflösen:

$$\begin{aligned}x &= e^{2y+1} \quad | \ln \\ \ln(x) &= 2y + 1 \\ 2y &= \ln(x) - 1 \\ y &= \frac{1}{2}(\ln(x) - 1)\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Gegeben ist die Funktion $g(x) = (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$

Geben Sie D_g und alle Nullstellen von g an.

In dem Funktionsterm ist eine Wurzel enthalten.

Daher muss gelten: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Definitionsmenge $D_g =]-\infty; 2]$

Bedingung für die Nullstellen: $g(x) = 0$

$(x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x} = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

$$\text{I) } x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 9) = 0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt ergibt $x_1 = 0$ und $x_2 = 9$

$$\text{II) } \sqrt{2-x} = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x_3 = 2$$

b) $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist.

Um die Wertemenge von h zu bestimmen, muss zunächst bestimmt werden, welche Werte der Term $x^2 + 1$ annehmen kann.

Das Schaubild der Funktion $y = x^2 + 1$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $S(0|1)$.

Die Wertemenge der Parabel ist $W_1 = [1; +\infty[$.

Die Funktion $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ nimmt daher Werte im Intervall $]0; 1]$ an.

Begründung: Wenn der Nenner den Wert 1 annimmt, nimmt der Bruch den Wert 1 an. Wenn der Nenner gegen unendlich strebt, strebt der Bruch gegen 0.

Wenn $\frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ strebt, gilt $h(x) \rightarrow -\infty$

Außer gilt $h(1) = \ln(1) = 0$.

Die Wertemenge von h ist $W =]-\infty; 0]$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von f ist.

Es ist $F(x) = -2x^{-\frac{1}{2}}$

Es gilt $F'(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Da $F'(x) = f(x)$ ist, ist F eine Stammfunktion von f .

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von b , für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat.

Bedingung: $\int_1^b f(x) dx = 1$

$$\int_1^b f(x) dx = [F(x)]_1^b = F(b) - F(1) = -\frac{2}{\sqrt{b}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{b}} + 2$$

$$-\frac{2}{\sqrt{b}} + 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{b}} = 1 \quad | \cdot \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b} = 2 \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow b = 4$$

Aufgabe 4:

- a) Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a .

$$m_a = \frac{y_{Q_a} - y_P}{x_{Q_a} - x_P} = \frac{f(a) - 2}{a - 0} = \frac{\frac{1}{8}a^3 - 2}{a} = \frac{a^3 - 16}{8a}$$

- b) Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft.

Allgemeine Tangentengleichung durch Q_a : $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

Einsetzen von $P(0|2)$: $2 = f'(a) \cdot (0 - a) + f(a)$

Einsetzen der Funktionsgleichungen:

$$2 = \frac{3}{8}a^2 \cdot (0 - a) + \frac{1}{8}a^3$$

$$\Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{4}a^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 = -8$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$