

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Bayern

Prüfungsteil B Analytische Geometrie Aufgabengruppe 2

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Aufgabengruppe 2

a) 2 BE, b) 4 BE, c) 3 BE, d) 4 BE, e) 4 BE, f) 4 BE, g) 4 BE

Der in Abbildung 1 dargestellte Körper wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche ABCD mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat EFGH mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$.

Der Mittelpunkt S des Quadrats ABCD ist der Ursprung des Koordinatensystems und der gesamte Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3 -Ebene als auch bezüglich der x_2x_3 -Ebene.

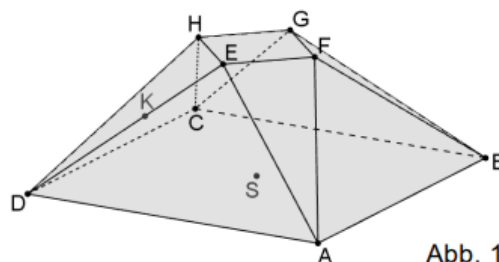


Abb. 1

- a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist.
- b) Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W. Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem.
(zur Kontrolle: $W : 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)
- c) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche ABCD einschließen.

Auf der Strecke [DE] gibt es einen Punkt K, für den $\overline{KE} = \overline{EF}$ gilt.

- d) Bestimmen Sie die Koordinaten von K.
- e) $N(1,6|0|3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke [KF]. Begründen Sie, dass die Gerade EN den Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E halbiert, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Gerade EN liegt.
- f) Der Körper kann in neun Pyramiden zerlegt werden, von denen jede kongruent zu genau einer der drei Pyramiden ABFS, HDES bzw. EFGHS ist (vgl. Abbildung 2).
Die Pyramide ABFS hat das Volumen $33\frac{1}{3}$ und die Pyramide HDES hat das Volumen $13\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers.

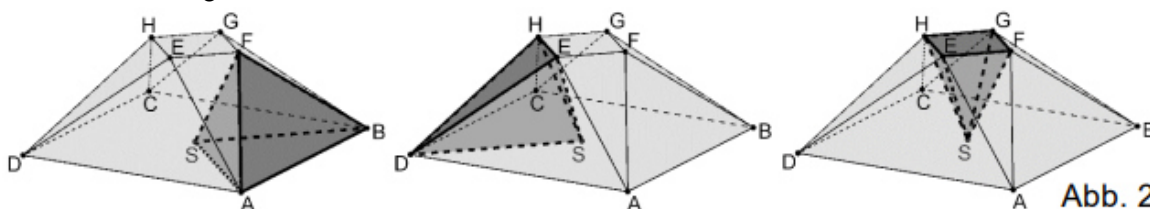


Abb. 2

- g) Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel.

Lösungen**Analytische Geometrie: Aufgabengruppe 2**

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{FB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -25 + 9 + 16 = 0$$

Damit ist das Dreieck ABF bei F rechtwinklig.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem.

(zur Kontrolle: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

$$\text{Parameterform von W: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von W: } \vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatenform von W: $4x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen von A(5|5|0): $20 = d$

Koordinatenform von W: $4x_2 + 3x_3 = 20$

Besondere Lage von W: Die Ebene W ist parallel zur x_1 -Achse.

c) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche ABCD einschließen.

Die Grundfläche ABCD entspricht der x_1x_2 -Ebene mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53,1^\circ$$

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von K.

$$\text{Es gilt } \overline{EF} = |\overline{EF}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8}.$$

$$\text{Außerdem gilt } \overline{ED} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ mit dem Einheitsvektor}$$

$$\overline{ED}_0 = \frac{1}{\sqrt{9+25+16}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{OK} = \overline{OE} + \sqrt{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0,4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ -2 \\ 2,4 \end{pmatrix}.$$

Koordinaten von K(3,2|-2|2,4)

e) Begründen Sie, dass die Gerade EN den Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E halbiert, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Gerade EN liegt.

Das Dreieck KF ist gleichschenkelig, da $\overline{KE} = \overline{EF}$.

Da N der Mittelpunkt der Basisseite $\overline{KF}$ ist, ist [EN] die Winkelhalbierende im Punkt E.

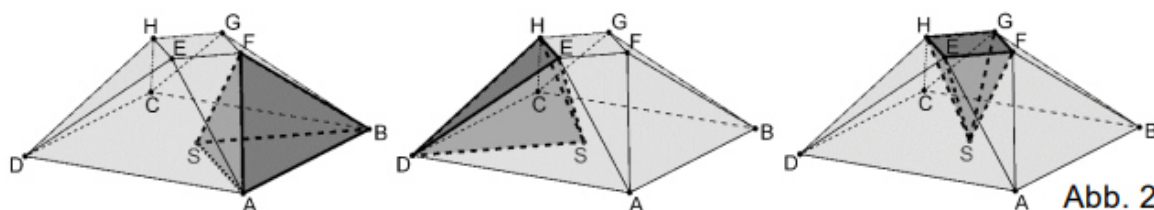
$$\text{Gleichung der Gerade durch E und N: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

Prüfung, dass S(0|0|0) auf der Gerade EN liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0 \\ -0,8 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 = 2 - 0,4r \\ 0 = 0 \\ 0 = 4 - 0,8r \end{array} \quad \text{Daraus folgt } r = 5.$$

Damit liegt S auf der Gerade EN.

f) Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers.



Der gesamte Körper enthält 4 Pyramiden vom Typ ABFS sowie 4 Pyramiden vom Typ DSEH sowie 1 Pyramide vom Typ EFGHS.

$$V = 4 \cdot V_{ABFS} + 4 \cdot V_{DSEH} + V_{EFGHS}$$

$$V_{EFGHS} = \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{EF}|^2 \cdot h_{\text{Pyr.}} \quad \text{mit } |\overrightarrow{EF}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8} \quad \text{und } h_{\text{Pyr.}} = 4$$

$$V_{EFGHS} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{8}^2 \cdot 4 = \frac{32}{3}$$

$$V = 4 \cdot 33\frac{1}{3} + 4 \cdot 13\frac{1}{3} + \frac{32}{3} \approx 197,33$$

g) Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel.

Der Mittelpunkt M der Kugel liegt aus Symmetriegründen auf der x_3 -Achse.

Ansatz für die Koordinaten: $M(0 | 0 | x_3)$

$$\text{Bedingung: } |\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MA}|$$

$$|\overrightarrow{ME}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 - x_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + (4 - x_3)^2}$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -x_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + 25 + x_3^2}$$

$$\sqrt{4 + (4 - x_3)^2} = \sqrt{25 + 25 + x_3^2}$$

$$\Rightarrow 4 + 16 - 8x_3 + x_3^2 = 25 + 25 + x_3^2$$

$$\Rightarrow 20 - 8x_3 = 50$$

$$\Rightarrow x_3 = -3,75$$

Der Punkt M hat die Koordinaten $M(0|0|-3,75)$.