

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Bayern

Prüfungsteil B Analytische Geometrie Aufgabengruppe 1

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

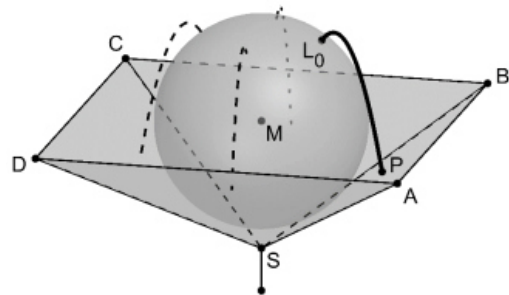
Aufgabengruppe 1

a) 4 BE, b) 3 BE, c) 2 BE, d) 4 BE, e) 2 BE, f) 4 BE, g) 2 BE, h) 4 BE

Die Punkte $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und D liegen in der Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide $ABCD$ mit der Spitze $S(0|0|1)$. A , B und S liegen in der Ebene F .

- Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenkelig ist.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$)
- Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide $ABCD$.
(zur Kontrolle: $V = 72$)

Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwände der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramide $ABCD$ beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt $M(0|0|4)$ und Radius r . Die x_1x_2 -Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.



- Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau.
(zur Kontrolle: $r = \sqrt{6}$)
- Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt.

Auf der Oberfläche der Marmorkugel treten an vier Stellen Wasserfontänen aus. Eine dieser Austrittsstellen wird im Modell durch den Punkt $L_0(1|1|6)$ beschrieben. Die zugehörige Fontäne wird modellhaft durch Punkte $L_t(t+1|t+1|6,2-5 \cdot (t-0,2)^2)$ mit geeigneten Werten $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben.

- f) Der Punkt P liegt innerhalb des Dreiecks ABS und beschreibt im Modell die Stelle, an der die Fontäne auf die Bronzeschale trifft (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie die Koordinaten von P .
- g) Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens.
- h) Aus den vier Austrittsstellen fließen pro Sekunde insgesamt 80 ml Wasser in die Bronzeschale. Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist.

Lösungen**Analytische Geometrie: Aufgabengruppe 1**

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenkelig ist.

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} \quad |\overline{AS}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$

$$|\overline{BS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$

Wegen $|\overline{AS}| = |\overline{BS}|$ ist das Dreieck gleichschenkelig.

Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von D : $D(0|-6|4)$

Da die Punkte A, B, C, D die x_3 - Koordinate 4 haben, ist die Ebene E parallel zur x_1x_2 -Ebene.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$)

$$\text{Parameterform von } F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von } F: \vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix} \text{ also } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatenform: $x_1 + x_2 - 2x_3 = d$

Punkt $A(6|0|4)$ einsetzen: $6 - 8 = -2 = d$

Koordinatenform von F : $x_1 + x_2 - 2x_3 = -2$

- c) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide $ABCD$.
(zur Kontrolle: $V = 72$)

$$V = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot h_{\text{Pyr.}}$$

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

Die Höhe der Pyramide ist die Differenz der x_3 -Koordinaten von S und A:

$$h_{\text{Pyr.}} = 4 - 1 = 3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{72}^2 \cdot 3 = 72$$

- d) Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau.
(zur Kontrolle: $r = \sqrt{6}$)

Der Radius der Kugel entspricht dem Abstand des Punktes $M(0|0|4)$ von der Ebene F.

$$\text{HNF von F: } \frac{x_1 + x_2 - 2x_3 + 2}{\sqrt{6}} = 0$$

$$d(F, M) = \left| \frac{0 + 0 - 8 + 2}{\sqrt{6}} \right| = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Der Durchmesser beträgt $d = 2 \cdot \sqrt{6} \approx 4,899 \text{ dm} = 48,99 \text{ cm}$.

- e) Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt.

Der höchste Punkt des Brunnens befindet sich mit einem senkrechten Abstand von $r = \sqrt{6}$ oberhalb von $M(0|0|4)$.

Der höchste Punkt hat eine Höhe von $4 + \sqrt{6} \approx 6,4 \text{ dm} = 64 \text{ cm}$

- f) Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

Einsetzen des Punktes $L_t(t+1 | t+1 | 6,2 - 5 \cdot (t-0,2)^2)$ in die Ebene F.

$$(t+1) + (t+1) - 2(6,2 - 5(t-0,2)^2) = -2$$

$$\Leftrightarrow 2t + 2 - 2(6,2 - 5t^2 + 2t - 0,2) = -2$$

$$\Leftrightarrow 10t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{20} = \frac{2 \pm 18}{20} \quad t_1 = 1 \quad t_2 = -0,8$$

Wegen $t \in \mathbb{R}_0^+$ kommt nur $t = 1$ in Betracht.

Daher gilt $L_1 = P(2 \mid 2 \mid 3)$.

- g) *Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens.*

Die x_3 -Koordinate des Punktes L_t ist $x_3 = 6,2 - 5 \cdot (t - 0,2)^2$.

Das Schaubild von $f(t) = 6,2 - 5 \cdot (t - 0,2)^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0,2 \mid 6,2)$. Dieser Punkt kann direkt abgelesen werden, da die Funktionsgleichung in der Scheitelform angegeben ist.

Der höchste Punkt der Fontäne ist auf der Höhe 6,2dm = 62 cm und liegt daher nicht höher als der höchste Punkt des Brunnens (64 cm).

- h) *Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist.*

Volumen des Brunnens: $V_{\text{Brunnen}} = V_{\text{Pyramide}} - V_{\text{Halbkugel}}$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot \sqrt{6}^3$$

$$V_{\text{Brunnen}} = 72 - \frac{2}{3} \pi \cdot \sqrt{6}^3 \approx 41,2 \text{ dm}^3 = 41200 \text{ cm}^3 = 41200 \text{ ml}$$

$$\text{Benötigte Zeit: } \frac{41200}{80} = 515 \text{ s}$$