

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Bayern

Prüfungsteil B Stochastik Aufgabengruppe 2

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Aufgabengruppe 2**Aufgabe 1: (3 BE)**

Luisa nimmt an einer Betriebsbesichtigung des Unternehmens teil. Zu Beginn der Führung bekommt sie ein Tütchen mit zehn Gummibärchen, von denen fünf weiß, zwei rot und drei grün sind. Luisa öffnet das Tütchen und nimmt, ohne hinzusehen, drei Gummibärchen heraus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Gummibärchen die gleiche Farbe haben.

Aufgabe 2: (a) 3 BE, b) 2 BE, c) 4 BE)

Vor dem Verpacken werden die verschiedenfarbigen Gummibärchen in großen Behältern gemischt, wobei der Anteil der roten Gummibärchen 25% beträgt. Ein Verpackungsautomat füllt jeweils 50 Gummibärchen aus einem der großen Behälter in eine Tüte.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist.
- b) Um sicherzustellen, dass jeweils genau 50 Gummibärchen in eine Tüte gelangen, fallen diese einzeln nacheinander aus einer Öffnung des Behälters in den Verpackungsautomaten. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann:

$$\sum_{k=0}^3 (0,75^k \cdot 0,25)$$

- c) Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist.

Aufgabe 3: (a) 3 BE, b) 3 BE, c) 2 BE)

Das Süßwarenunternehmen produziert auch zuckerreduziert und vegane Fruchtgummis und bringt diese in entsprechend gekennzeichneten Tüten in den Handel.

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind. 42% der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet. Insgesamt sind 63% der Tüten weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

V: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als vegan gekennzeichnet.“

R: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als zuckerreduziert gekennzeichnet.“

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\bar{R}$.
- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{V}}(R)$.
- c) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P_{\bar{V}}(R)$ im Sachzusammenhang.

Aufgabe 4: (a) 3 BE, b) 2 BE)

Bei einer Werbeaktion werden den Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf dem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

- a) Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X .
- b) Ohne Kenntnis des Erwartungswerts ist die Varianz in der Regel nicht aussagekräftig. Daher wird für den Vergleich verschiedener Zufallsgrößen oft der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert betrachtet, der als relative Standardabweichung bezeichnet wird.

Die Zufallsgröße Y_n beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln von n Losen sichtbar werden. Es gilt $E(Y_n) = n$ und $\text{Var}(Y_n) = n$.

Bestimmen Sie den Wert von n , für den die relative Standardabweichung 5% beträgt.

Lösungen**Stochastik: Aufgabengruppe 2****Aufgabe 1:**

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Gummibärchen die gleiche Farbe haben.

$$P(\text{dreimal weiß}) + P(\text{dreimal grün}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{120}$$

Aufgabe 2:

- a) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist.*

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der roten Gummibärchen an.
 X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0,25$.

$$\frac{1}{3} \text{ von } 50 \text{ ist } \frac{1}{3} \cdot 50 \approx 16,67 \quad P(X \geq 17) = 1 - P(X \leq 16) \approx 0,098$$

- b) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann:*

$$\sum_{k=0}^3 (0,75^k \cdot 0,25)$$

$$\sum_{k=0}^3 (0,75^k \cdot 0,25) = 0,25 + 0,75 \cdot 0,25 + 0,75^2 \cdot 0,25 + 0,75^3 \cdot 0,25$$

$0,25$: 1. Gummibärchen ist rot, das 2., 3., 4. Gummibärchen kann alles sein

$0,75 \cdot 0,25$: 1. ist nicht rot, das 2. ist rot, das 3., 4. kann alles sein

$0,75^2 \cdot 0,25$: 1. und 2. ist nicht rot, das 3. ist rot, das 4. kann alles sein

$0,75^3 \cdot 0,25$: 1., 2., 3. ist nicht rot, das 4. ist rot

Ergebnis: Von den ersten vier Gummibärchen ist mindestens eines rot.

- c) Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gelben Gummibärchen an.
 X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und unbekanntem p .

Bedingung: $P(X \geq 1) \geq 0,95$

$$1 - P(X = 0) \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - (1-p)^{50} \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow -(1-p)^{50} \geq -0,05$$

$$\Leftrightarrow (1-p)^{50} \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow 1-p \leq \sqrt[50]{0,05}$$

$$\Leftrightarrow p \geq 1 - \sqrt[50]{0,05} \approx 0,058$$

Der Anteil der gelben Gummibärchen muss mindestens 5,8% sein.

Aufgabe 3:

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\bar{R}$.

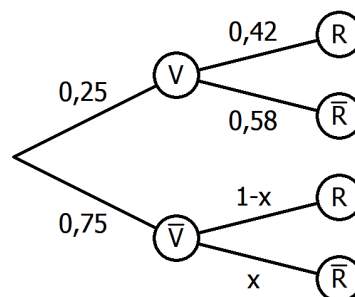
$$\text{Es gilt } P(\bar{V}) = 3 \cdot P(V)$$

$$\text{Wegen } P(\bar{V}) = 1 - P(V) \text{ folgt } 1 - P(V) = 3 \cdot P(V) \Leftrightarrow 4 \cdot P(V) = 1 \Leftrightarrow P(V) = 0,25$$

$$\text{Daraus folgt } P(\bar{V}) = 3 \cdot 0,25 = 0,75.$$

$$\text{Außerdem gilt } P_V(R) = 0,42.$$

Baumdiagramm:



$$\text{Es gilt } P(\bar{V} \cap \bar{R}) = 0,63 \Leftrightarrow 0,75 \cdot x = 0,63 \Leftrightarrow x = 0,84$$

$$\text{Es gilt: } P(\bar{R}) = 0,25 \cdot 0,58 + 0,75 \cdot 0,84 = 0,775$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{V}}(R)$.

$$P_{\bar{V}}(R) = \frac{P(\bar{V} \cap R)}{P(\bar{V})} = \frac{0,75 \cdot 0,16}{0,75} = 0,16$$

c) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P_{\bar{V}}(R)$ im Sachzusammenhang.

$P_{\bar{V}}(R)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine zufällig ausgewählte Tüte, die nicht als vegan gekennzeichnet wurde auch als zuckerreduziert gekennzeichnet wurde.

Mit dem Gegenereignis $1 - P_{\bar{V}}(R)$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass eine zufällig ausgewählte Tüte, die nicht als vegan gekennzeichnet wurde auch nicht als zuckerreduziert gekennzeichnet wurde.

Aufgabe 4:

Bei einer Werbeaktion werden den Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf dem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

a) Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X .

$$\text{Bedingung: } E(X) = 1 \Rightarrow p_1 + 0,4 + 0,3 = 1 \Rightarrow p_1 = 0,3$$

$$p_0 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 1 \Leftrightarrow p_0 = 0,4$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (0-1)^2 \cdot 0,4 + (1-1)^2 \cdot 0,3 + (2-1)^2 \cdot 0,2 + (3-1)^2 \cdot 0,1 \\ &= 0,4 + 0,2 + 0,4 = 1 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie den Wert von n , für den die relative Standardabweichung 5% beträgt.

$$\text{Bedingung: } \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_n)}}{E(Y_n)} = 0,05$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = 0,05 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,05 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 20 \Rightarrow n = 400$$