

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Bayern

Prüfungsteil B Stochastik Aufgabengruppe 1

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2022

Aufgabengruppe 1**Aufgabe 1: (3 BE)**

An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen:

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} \qquad P(B) = \frac{6}{6^4}$$

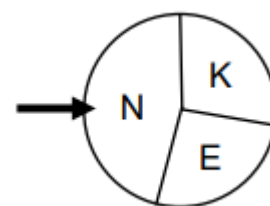
Aufgabe 2: (a) 2 BE, b) 2 BE, c) 5 BE)

Im Eingangsbereich des Freizeitparks können Bollerwagen ausgeliehen werden. Erfahrungsgemäß nutzen 15% der Familien dieses Angebot. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Bollerwagen, die von den ersten 200 Familien, die an einem Tag den Freizeitpark betreten, entliehen werden. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass eine Familie höchstens einen Bollerwagen ausleiht und dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 25 Bollerwagen ausgeliehen werden.
- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fünfte Familie die erste ist, die einen Bollerwagen ausleiht.
- c) Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks den kleinsten symmetrischen um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% liegen.

Aufgabe 3: (6 BE)

Der Freizeitpark veranstaltet ein Glücksspiel, bei dem Eintrittskarten für den Freizeitpark gewonnen werden können. Zu Beginn des Spiels wird man einen Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Erzielt man dabei die Zahl 6, darf man anschließend einmal an einem Glücksrad mit drei Sektoren drehen (vgl. schematische Abbildung).



Wird Sektor K erzielt, gewinnt man eine Kinderkarte im Wert von 28 Euro, bei Sektor E eine Erwachsenenkarte im Wert von 36 Euro. Bei Sektor N geht man leer aus. Der Mittelpunktswinkel des Sektors E beträgt 160° .

Die Größen der Sektoren K und E sind so gewählt, dass pro Spiel der Gewinn im Mittel drei Euro beträgt. Bestimmen Sie die Größe der Mittelpunktswinkel der Sektoren K und E.

Aufgabe 4: (a) 2 BE, b) 2 BE, c) 3 BE)

Am Ausgang des Freizeitparks gibt es einen Automaten, der auf Knopfdruck einen Anstecker mit einem lustigen Motiv bedruckt und anschließend ausgibt. Für den Druck wird aus n verschiedenen Motiven eines zufällig ausgewählt, wobei jedes Motiv die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Ein Kind holt sich drei Anstecker aus dem Automaten.

- a) Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben.
- b) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n^2}$ hat.
- c) Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90% ist.

Lösungen**Stochastik: Aufgabengruppe 1****Aufgabe 1:**

- a) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen.*

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}$$

Für Laplace-Wahrscheinlichkeiten gilt: $P(A) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl aller Fälle}}$

6^4 ist die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die 4 Familien auf die 6 Kassen verteilen.

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, dass die 4 Familien hintereinander 4 verschiedene Kassen wählen. Für die erste Familie gibt es 6 Möglichkeiten, für die zweite nur 5, für die dritte nur 4 und für die vierte nur 3.

A: „Die vier Familien zahlen an vier verschiedenen Kassen.“

$$P(B) = \frac{6}{6^4}$$

Für Laplace-Wahrscheinlichkeiten gilt: $P(B) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl aller Fälle}}$

6^4 ist die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die 4 Familien auf die 6 Kassen verteilen.

$6 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, dass die 4 Familien alle dieselbe Kasse wählen. Für die erste Familie gibt es 6 Möglichkeiten, für die restlichen Familien dann nur noch eine.

B: „Die vier Familien zahlen an derselben Kasse.“

Aufgabe 2:

- a) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 25 Bollerwagen ausgeliehen werden.*

X ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0,15$.

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 0,863 = 86,3\%$$

- b) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fünfte Familie die erste ist, die einen Bollerwagen ausleiht.*

Es handelt sich hier um keine Binomialverteilung, da eine Reihenfolge vorgegeben ist, welche Familie den Bollerwagen ausleiht.

$P(\text{die ersten 4 Familien leihen keinen Bollerwagen und die fünfte leiht einen aus})$

$$= 0,85^4 \cdot 0,15 \approx 0,078 = 7,8\%$$

- c) *Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks den kleinsten symmetrischen um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% liegen.*

Erwartungswert von X: $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,15 = 30$

Ausprobieren:

$$P(30 - 5 \leq X \leq 30 + 5) = P(25 \leq X \leq 35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 24) \\ \approx 0,861 - 0,137 = 0,724 < 0,75$$

$$P(30 - 6 \leq X \leq 30 + 6) = P(24 \leq X \leq 36) = P(X \leq 36) - P(X \leq 23) \\ \approx 0,899 - 0,096 = 0,803 > 0,75$$

Der kleinste Bereich ist $\{24; \dots; 36\}$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Größe der Mittelpunktswinkel der Sektoren K und E.

$$\text{Es gilt } P(N) = \frac{160}{360} = \frac{4}{9} \text{ und } P(K) = p \text{ und } P(E) = 1 - p - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} - p.$$

Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn des Spielers an.

$$P(X = 28) = \frac{1}{6} \cdot p \quad P(X = 36) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{9} - p \right) \quad P(X = 0) = p_0$$

Bedingung: $E(X) = 3$

$$E(X) = 28 \cdot \frac{1}{6} p + 36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{9} - p \right) + 0 \cdot p_0 = -\frac{4}{3} p + \frac{10}{3}$$

$$-\frac{4}{3} p + \frac{10}{3} = 3 \Leftrightarrow p = 0,25$$

$$\text{Winkel von Sektor K: } 360^\circ \cdot \frac{1}{4} = 90^\circ$$

$$\text{Winkel von Sektor E: } 360^\circ - 90^\circ - 160^\circ = 110^\circ$$

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben.

$$\begin{aligned} &P(\text{nicht alle drei Anstecker haben dasselbe Motiv}) \\ &= 1 - P(\text{alle 3 Anstecker haben dasselbe Motiv}) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 5 = \frac{24}{25}$$

b) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n^2}$ hat.

$$P(\text{drei verschiedene Motive}) = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n^2}$$

- c) Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90% ist.

Bedingung:

$$\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n^2} > 0,9 \quad | \cdot n^2$$

$$n^2 - 3n + 2 > 0,9n^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 > 0,9n^2$$

$$\Leftrightarrow 0,1n^2 - 3n + 2 > 0$$

Die Ungleichung wird über die Gleichung $0,1n^2 - 3n + 2 = 0$ gelöst.

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 0,8}}{0,2} = \frac{3 \pm \sqrt{8,2}}{0,2} \quad n_1 \approx 29,3 \quad n_2 \approx 0,68$$

Da die Funktion $y = 0,1n^2 - 3n + 2$ eine nach oben geöffnete Parabel ist und n_1 und n_2 die Nullstellen der Parabel sind, gilt die Ungleichung für $n > 29,3$ oder $n < 0,68$.

Da $n < 0,68$ nicht in Betracht kommt, muss n mindestens 30 sein.

Es müssen mindestens 30 verschiedene Motive sein.