

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Bayern

Prüfungsteil B Analysis Aufgabengruppe 2

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

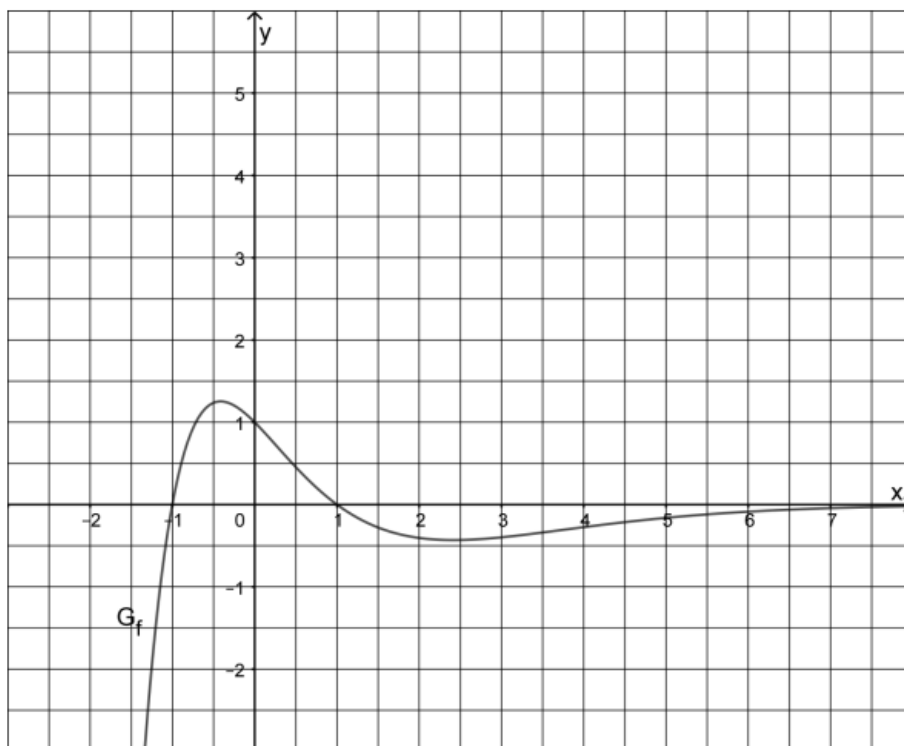
Mai 2022

Aufgabengruppe 2

Aufgabe 1: (a) 2 BE, b) 4 BE, c) 4 BE, d) 2 BE, e) 3 BE, f) 2 BE, g) 2 BE, h) 3 BE, i) 2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto (1 - x^2) \cdot e^{-x}$.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f .



- a) Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.
- b) Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f .

(zur Kontrolle: $f'(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x}$)

- c) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral

$$\int_{-1}^4 f(x) dx.$$

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f , deren Graph durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft.

- d) Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt.
- e) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F . Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3,5$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2$ gilt.
- f) Deuten Sie die Aussage $F(2,5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch.

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$h_k : x \mapsto (1 - kx^2) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet.

Für $k = 1$ ergibt sich die bisher betrachtete Funktion f .

- g) Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an.
- h) Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x -Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert.
- i) Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x -Achse symmetrisch zueinander liegen.

Aufgabe 2: (a) 5 BE, b) 3 BE, c) 2 BE, d) 6 BE)

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

- a) Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0;1[$ besitzt.

(zur Kontrolle: $g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$)

- b) Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W(0|g(0))$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein.
- c) Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $] -1;1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an.
- d) Es wird das Flächenstück zwischen G_g und der x -Achse im Bereich $-\ln 3 \leq x \leq b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y -Achse dieses Flächenstück halbiert.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 2****Aufgabe 1:**

a) Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.

Bedingung: $f(x) = 0$

$(1 - x^2) \cdot e^{-x} = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Gleichung II): $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar

b) Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f .

Ableitungsfunktion von $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$ mit Hilfe der Produktregel:

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x} + (1 - x^2) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} \cdot (-2x - 1 + x^2)$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$e^{-x} \cdot (-2x - 1 + x^2) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar

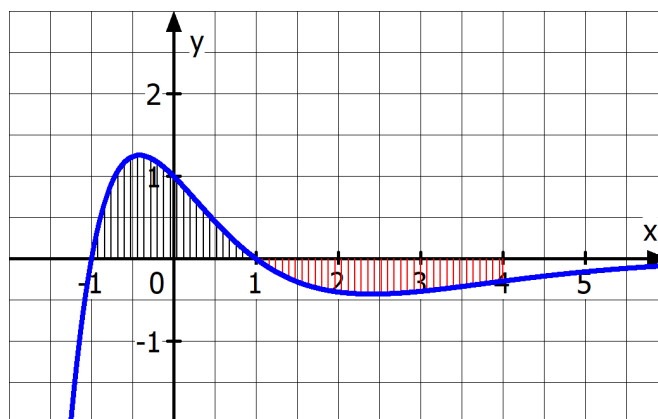
Gleichung II): $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \approx 2,41 \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} \approx -0,41$$

Da aus der Abbildung erkennbar ist, dass das Schaubild von f zwei Extremstellen besitzt, muss die hinreichende Bedingung nicht überprüft werden.

c) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral

$$\int_{-1}^4 f(x) dx.$$



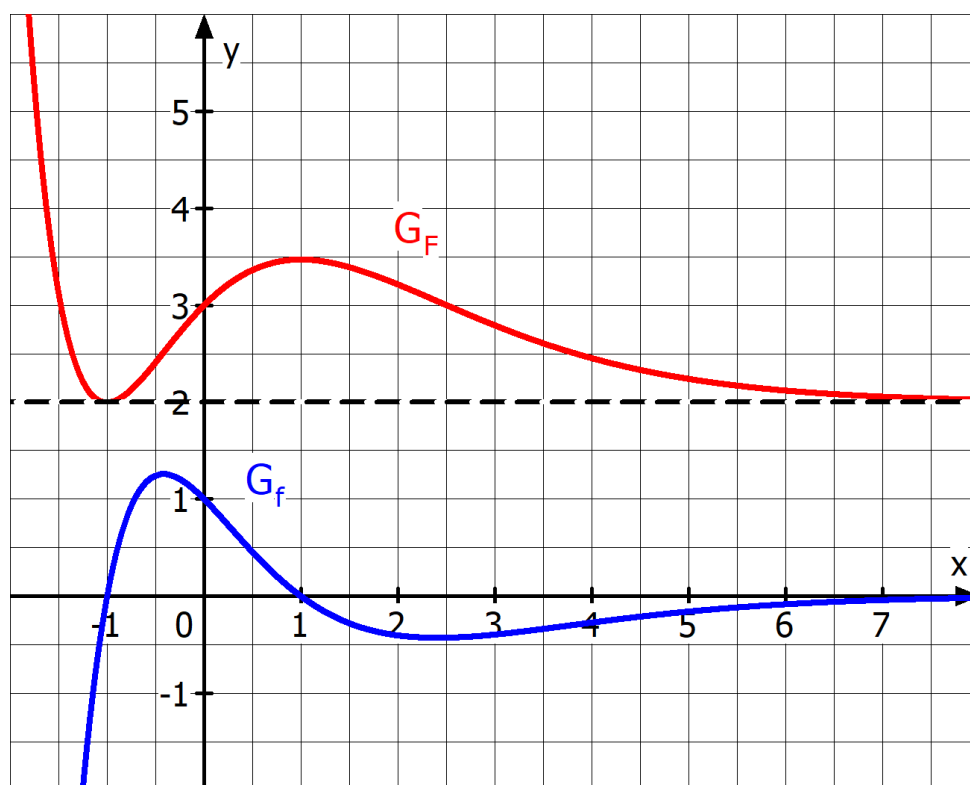
Es befinden sich ca. 6 Kästchen oberhalb der x-Achse und 4 Kästchen unterhalb der x-Achse. 1 Kästchen entspricht einem Flächeninhalt von 0,25 Flächeneinheiten.

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = 6 \text{ Kästchen} - 4 \text{ Kästchen} = 2 \text{ Kästchen} = 0,5$$

- d) Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt.

Die Funktion f hat als Ableitungsfunktion von F bei $x = -1$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

- e) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F . Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3,5$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2$ gilt.



- f) Deuten Sie die Aussage $F(2,5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch.

$$F(2,5) - F(0) = \int_0^{2,5} f(x) dx \approx 0$$

Im Intervall $[0; 2,5]$ ist die Fläche, die der Graph von f oberhalb der x-Achse mit dieser einschließt genau so groß wie die Fläche, die er unterhalb der x-Achse mit dieser einschließt.

g) Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an.

Bedingung: $h_k(x) = 0$

$(1 - kx^2) \cdot e^{-x} = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $1 - kx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{k} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{k}}$

Für $k > 0$ existieren 2 Nullstellen.

Für $k \leq 0$ existieren keine Nullstellen.

h) Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x -Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert.

Gemäß Teilaufgabe g) sind die Nullstellen $x = \pm \sqrt{\frac{1}{k}}$.

Bedingung: $2 \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{k}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{k} = 4 \Leftrightarrow k = 0,25$

i) Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x -Achse symmetrisch zueinander liegen.

Bedingung für die Symmetrie zur x -Achse:

$f(x) = -h_k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$(1 - x^2) \cdot e^{-x} = -(1 - kx^2) \cdot e^{-x}$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 = -1 + kx^2$

Die Gleichung ist für $x = 0$ falsch.

Somit gibt es keinen Wert von k , für den die Schaubilder symmetrisch zur x -Achse zueinander liegen.

Aufgabe 2:

- a) Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0;1[$ besitzt.

g ist streng monoton zunehmend, wenn $g'(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ableitung mit der Quotientenregel: } g'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Da sowohl der Zähler als auch der Nenner immer positiv ist, gilt $g'(x) > 0$.

$$\text{Wertemenge von } g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Sowohl der Zähler als auch der Nenner ist immer positiv, also gilt $g(x) > 0$.
Da der Nenner immer größer als der Zähler ist, gilt $g(x) < 1$.

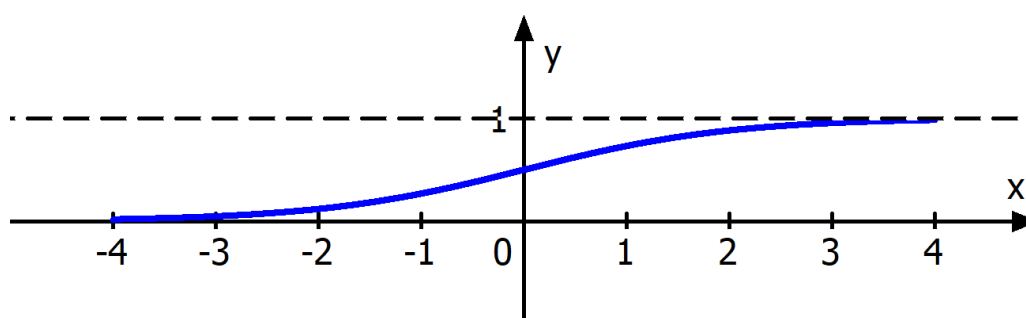
$$\text{Es gilt } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \rightarrow \frac{0}{1} = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

Da g streng monoton zunehmend ist, ergibt sich dadurch die Wertemenge $]0;1[$.

- b) Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W(0|g(0))$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein.

$$\text{Wegen } g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \text{ gilt } g'(0) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Wegen } g(0) = \frac{1}{2} \text{ ist der Wendepunkt } W(0 | \frac{1}{2}).$$



- c) Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $] -1; 1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an.

Um die Wertemenge von $]0; 1[$ auf $] -1; 1[$ zu ändern gibt es folgende Möglichkeit:

1. Schritt:

Verschiebung des Schaubildes von g um 0,5 nach unten.

Neue Wertemenge $] -0,5; 0,5[$ mit $\tilde{g}(x) = g(x) - 0,5 = \frac{e^x}{e^x + 1} - 0,5$

2. Schritt:

Streckung des Schaubildes von g in y -Richtung mit de Faktor 2.

Neue Wertemenge $] -1; 1[$ mit $g^*(x) = 2 \cdot \tilde{g}(x) = 2 \cdot \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - 0,5 \right) = 2 \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} - 1$

- d) Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y -Achse dieses Flächenstück halbiert.

$$A_1 = \int_{-\ln(3)}^0 g(x) dx = \left[\ln|e^x + 1| \right]_{-\ln(3)}^0 = \ln(2) - \ln\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \ln(2) - \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Begründung für die Stammfunktion: Es gilt $g(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ mit $h(x) = e^x + 1$

Das heißt, im Zähler des Bruches steht die Ableitung des Nenners.

Hier ist die Stammfunktion $G(x) = \ln|h(x)|$.

$$A_2 = \int_0^b g(x) dx = \left[\ln|e^x + 1| \right]_0^b = \ln(e^b + 1) - \ln(2)$$

Bedingung: $A_1 = A_2$

$$\ln(2) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln(e^b + 1) - \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{2}{4/3} + \ln(2) = \ln(e^b + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} + \ln(2) = \ln(e^b + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) = \ln(e^b + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3 = e^b + 1$$

$$\Leftrightarrow b = \ln(2)$$