

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Bayern

Prüfungsteil B Analysis Aufgabengruppe 1

Hilfsmittel: Merkhilfe, Taschenrechner

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2022

Aufgabengruppe 1**Aufgabe 1: (a) 3 BE, b) 5 BE, c) 4 BE, d) 5 BE**

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{6x}{x^2 - 4}$.

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

- a) Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von G_f an.
Begründen Sie, dass G_f die x -Achse als waagrechte Asymptote besitzt.
- b) Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty; -2[$, $]-2; 2[$ und $]2; +\infty[$ der Definitionsmenge.
Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $P(0|f(0))$.

$$(zur\ Kontrolle: f'(x) = -\frac{6 \cdot (x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2})$$

Die Punkte $A(3|3,6)$ und $B(8|0,8)$ liegen auf G_f ; zwischen diesen beiden Punkten verläuft G_f unterhalb der Strecke $[AB]$.

- c) Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem.
- d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der Strecke $[AB]$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 2: (a) 1 BE, b) 2 BE, c) 3 BE, d) 4 BE

Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_{a,b,c} : x \mapsto \frac{ax + b}{x^2 + c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b,c}$.

- a) Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar.
Geben Sie die zugehörigen Werte von a , b und c an.
- b) Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y -Achse und schneidet die x -Achse nicht.
- c) Geben Sie für a , b und c alle Werte an, sodass sowohl $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x -Achse ist.

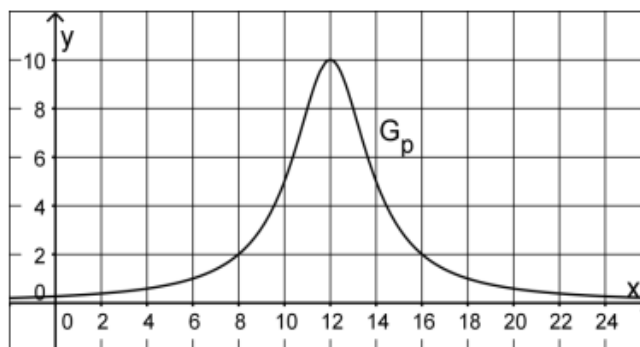
d) Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2 + 2bx - ac}{(x^2 + c)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte.

Aufgabe 3: (a) 4 BE, b) 4 BE, c) 2 BE, d) 3 BE)

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion p:

$$x \mapsto \frac{40}{(x-12)^2 + 4}$$



a) Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion

$h : x \mapsto \frac{5}{x^2 + 4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Geraden mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \leq x \leq 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

- b) Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40% ihres Tageshöchstwerts von 10kW beträgt.
- c) Die Funktion p besitzt im Intervall $[4;12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.
- d) Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh). Die in $[4;20]$ definierte Funktion $x \mapsto E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist. Es gilt $E'(x) = p(x)$ für $x \in [4;20]$. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält.

Lösungen**Analysis: Aufgabengruppe 1****Aufgabe 1:**

a) Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von G_f an.

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 - 4}$$

Die senkrechten Asymptoten befinden sich an den Definitionslücken.

Gleichung der senkrechten Asymptoten: $x = 2$ und $x = -2$

Begründen Sie, dass G_f die x -Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{x \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{\left(x - \frac{4}{x}\right)} = 0$$

Da der Grenzwert 0 ist, nähert sich das Schaubild für $x \rightarrow \pm\infty$ der x -Achse.

b) Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty; -2[$, $]-2; 2[$ und $]2; +\infty[$ der Definitionsmenge.

Das Monotonieverhalten wird mithilfe der 1. Ableitung untersucht.

Aus der Quotientenregel folgt

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (x^2 - 4) - 6x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-6x^2 - 24}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-6 \cdot (x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ gilt $f'(x) < 0$ da

der Zähler $-6 \cdot (x^2 + 4) < 0$ und der Nenner $(x^2 - 4)^2 > 0$ ist-

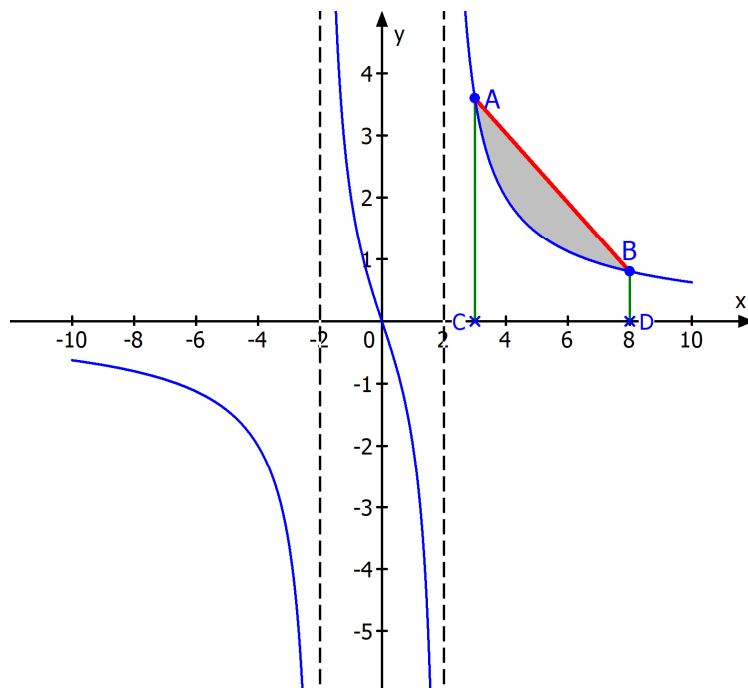
Aufgrund des negativen Vorzeichens der 1. Ableitung ist die Funktion in allen angegebenen Teilintervallen streng monoton fallend.

Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $P(0|f(0))$.

$$f'(0) = \frac{-24}{16} = -\frac{3}{2}$$

- c) Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem.

In der Zeichnung ist die Fläche aus Aufgabe d) bereits eingezeichnet.



- d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der Strecke $[AB]$ eingeschlossen wird.

Die zu berechnende Fläche ist in der Zeichnung oben markiert.

Zunächst die Fläche des Trapezes ABCD berechnet:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AC} + \overline{BD}) \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot (f(3) + f(8)) \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot (3,6 + 0,8) \cdot 5 = 11 \text{ FE}$$

Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse:

$$A = \int_3^8 \frac{6x}{x^2 - 4} dx = 3 \cdot \int_3^8 \frac{2x}{x^2 - 4} = 3 \cdot \left[\ln|x^2 - 4| \right]_3^8 = 3 \cdot (\ln(60) - \ln(5)) \approx 7,45$$

Gesuchter Flächeninhalt: $A_{\text{grau}} \approx 11 - 7,45 = 3,55$ Flächeneinheiten

Aufgabe 2:

a) *Geben Sie die zugehörigen Werte von a , b und c an.*

Die Funktion aus Aufgabe 1 lautet $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 4}$.

Diese Funktion ist eine Funktion der Schar für $a = 6$, $b = 0$ und $c = -4$.

b) *Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y -Achse und schneidet die x -Achse nicht.*

$$\text{Es gilt } f_{0,b,c}(x) = \frac{b}{x^2 + c}.$$

Nachweis, dass der Graph von $f_{0,b,c}$ symmetrisch zur y -Achse ist:

Es muss gelten: $f_{0,b,c}(-x) = f_{0,b,c}(x)$.

Es gilt $f_{0,b,c}(-x) = \frac{b}{(-x)^2 + c} = \frac{b}{x^2 + c} = f_{0,b,c}(x)$, damit ist der Symmetrienachweis erbracht.

Bedingung für Schnittpunkt mit der x -Achse: $f(x) = 0$

$$\frac{b}{x^2 + c} = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Da $b \neq 0$ ist, gibt es keinen Schnittpunkt mit der x -Achse.

c) *Geben Sie für a , b und c alle Werte an, sodass sowohl $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x -Achse ist.*

Wenn $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ ist, darf der Nenner nicht Null werden.

Dies ist der Fall, wenn $c > 0$ ist.

Bedingung für die Symmetrie mit dem Koordinatenursprung: $f_{a,b,c}(-x) = -f_{a,b,c}(x)$

$$f_{a,b,c}(-x) = \frac{a \cdot (-x) + b}{(-x)^2 + c} = \frac{-ax + b}{x^2 + c} \quad (*)$$

$$-f_{a,b,c}(x) = -\frac{a \cdot x + b}{x^2 + c} = \frac{-ax - b}{x^2 + c} \quad (**)$$

Damit (*) und (**) für alle x -Werte gültig sind, muss $b = 0$ sein.

Bedingung: $c > 0$, $b = 0$ und $a \neq 0$ (da der Graph nicht identisch mit der x -Achse sein soll).

d) Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2 + 2bx - ac}{(x^2 + c)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte.

Notwendige Bedingung: $f'_{a,b,c}(x) = 0$

$$-\frac{ax^2 + 2bx - ac}{(x^2 + c)^2} = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2bx - ac = 0$$

Lösung mit der abc-Formel: $x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 + 4a^2c}}{2a}$

Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ ist, dann ist die Diskriminante $4b^2 + 4a^2c > 0$.
Somit besitzt die quadratische Gleichung zwei einfache Nullstellen.

Da die einfachen Nullstellen einen Vorzeichenwechsel besitzen, befinden sich an diesen Stellen die Extremstellen des Graphen von $f_{a,b,c}$.

Aufgabe 3:

a) Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion

$h: x \mapsto \frac{5}{x^2 + 4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Geraden mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

1. Schritt: Verschiebung des Schaubildes G_p um 12 Längeneinheiten nach rechts

2. Schritt: Streckung des Schaubildes G_p in y-Richtung mit dem Faktor 8

Die Funktion $h(x) = \frac{5}{x^2 + 4}$ ist symmetrisch zur y-Achse, da $h(-x) = h(x)$ gilt.

Durch die Verschiebung um 12 Längeneinheiten nach rechts ist das Schaubild von h symmetrisch zur senkrechten Geraden $x = 12$. Die anschließende Streckung in y-Richtung ändert diese Symmetrie nicht mehr.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40% ihres Tageshöchstwerts von 10kW beträgt.

$$p(x) = \frac{40}{(x - 12)^2 + 4}$$

40% von 10kW sind 4 kW.

Bedingung: $p(x) = 4$

$$4 = \frac{40}{(x-12)^2 + 4} \Leftrightarrow 4 \cdot ((x-12)^2 + 4) = 40 \Leftrightarrow (x-12)^2 = 6 \Rightarrow x-12 = \pm\sqrt{6}$$

Daraus folgt $x \approx 14,449$ oder $x \approx 9,551$.

Da nach der Uhrzeit am Nachmittag gefragt wird, ist die gesuchte Lösung $x \approx 14,449$.

Wegen $0,449 \cdot 60 \approx 27$ ist die gesuchte Uhrzeit 14.27 Uhr.

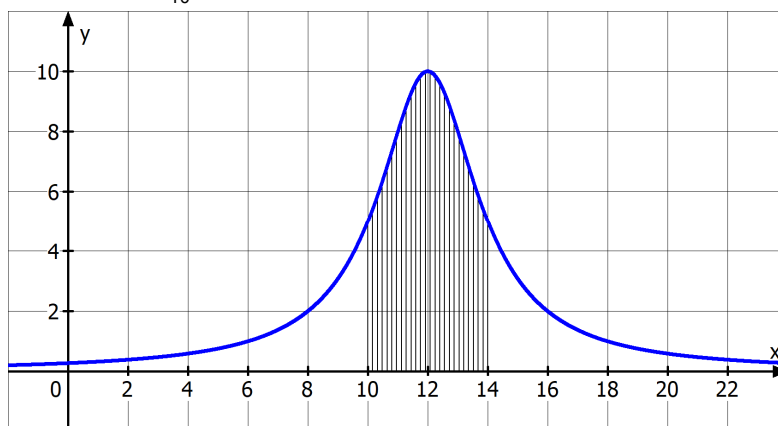
- c) Die Funktion p besitzt im Intervall $[4;12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.

An der Wendestelle ist die Steigung des Schaubildes im Intervall $[4;12]$ maximal. Die Wendestelle entspricht dem Zeitpunkt, an dem die Zunahme der Leistung am größten ist.

- d) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält.

Elektrische Energie, die zwischen 10 Uhr und 14 Uhr eingespeist wird:

$$E(14) - E(10) = [E(x)]_{10}^{14} = \int_{10}^{14} p(x) dx$$



Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von p beträgt zwischen $x = 10$ und $x = 14$ etwa 31 (Kästchen zählen). Die Anlage speist in dem genannten Zeitraum ca. 31 kWh in das Stromnetz ein.

Der Eigentümer erhält eine Vergütung von etwa 3,10 €.