

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juli 2022

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 2 Betrachtet wird das Modell einer Kirche. Der Kirchturm besteht aus einem Quader mit aufgesetzter Pyramide.
Einer Bauzeichnung kann man Folgendes entnehmen: Die Punkte $A(2|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|2|0)$ und $D(0|0|0)$ bilden die Grundfläche. Das Dach hat die vier Eckpunkte $E(2|0|6)$, $F(2|2|6)$, $G(0|2|6)$, $H(0|0|6)$ und die Turmspitze $S(1|1|8)$.

Eine Längeneinheit entspricht 10 Meter (m).

- 2.1 Zeichnen Sie das Modell des Kirchturmes in ein geeignetes Koordinatensystem. (3 Punkte)
- 2.2 Das Dach des Kirchturmes soll vollständig gedeckt werden. Hierfür werden Ziegel verwendet, die pro Ziegel $0,12 \text{ m}^2$ abdecken. Die Ziegel werden auf Paletten mit jeweils 200 Ziegeln geliefert.
Bestimmen Sie die kleinstmögliche Anzahl von Paletten, die geliefert werden müssten.

(3 Punkte)

- 2.3 Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ modelliert zu einem bestimmten Zeitpunkt die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes.

- 2.3.1 Berechnen Sie den Winkel, unter dem das Sonnenlicht auf den Boden (d.h. x_1x_2 -Ebene) trifft.

(2 Punkte)

- 2.3.2 Auf der Turmspitze S befindet sich ein senkrecht stehendes Kreuz der Höhe h. Der Kirchturm und das Kreuz werfen einen Schatten. Der Schattenpunkt des höchsten Punktes ist $P(3,1|5,2|0)$. Bestimmen Sie die Höhe h.

(3 Punkte)

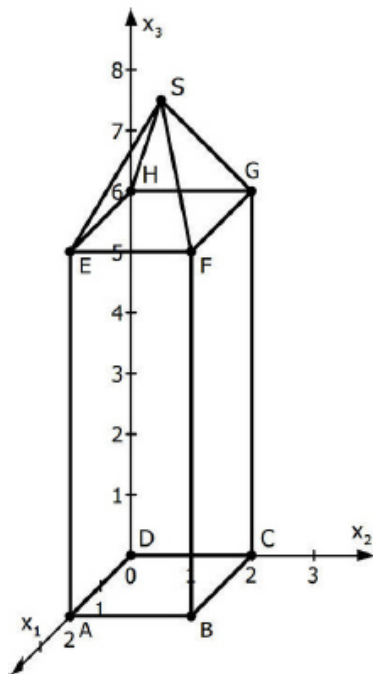
- 2.4 Im Kirchturm soll eine Glocke eingebaut werden. Die Position der Glocke wird im Modell mit Q bezeichnet. Der Abstand von Q zu den Eckpunkten E, F, G und H des Daches soll jeweils dreimal so groß sein wie der Abstand von Q zur Turmspitze S.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q.

(4 Punkte)

Lösungen

- 2.1 Zeichnen Sie das Modell des Kirchturmes in ein geeignetes Koordinatensystem.



- 2.2 Bestimmen Sie die kleinstmögliche Anzahl von Paletten, die geliefert werden müssten.

Flächeninhalt des Dreiecks HGS:

$$A_{\text{HGS}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{HG} \times \overrightarrow{HS}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20}$$

$$\text{Flächeninhalt der Dachfläche: } 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} = 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 100 \text{m}^2$$

$$\text{Anzahl der Paletten: } \frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot 100}{0,12 \cdot 200} \approx 37,3$$

Es müssen mindestens 38 Paletten mit Ziegeln angeliefert werden.

2.3.1 Berechnen Sie den Winkel, unter dem das Sonnenlicht auf den Boden (d.h. x_1x_2 -Ebene) trifft.

Es handelt sich um einen Winkel zwischen der Geraden mit dem angegebenen Richtungsvektor und der x_1x_2 -Ebene mit dem

Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha \approx 60,8^\circ$$

2.3.2 Bestimmen Sie die Höhe h .

Der höchste Punkt des Kreuzes befindet sich direkt über dem Punkt S, also $K(1|1|8+h)$.

Die Gerade durch den Punkt P, die in Richtung des einfallenden Lichtes

verläuft besitzt die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 5,2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Kontrolle, für welches h der Punkt K auf der Gerade liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 5,2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 1 & = & 3,1 + t \\ 1 & = & 5,2 + 2t \\ 8+h & = & -4t \end{array}$$

1. Zeile: $t = -2,1$

2. Zeile: $t = -2,1$

3. Zeile: $h = 0,4$

Das Kreuz ist $0,4 \cdot 10\text{m} = 4\text{m}$ hoch.

2.4 Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q.

Da der Punkt Q von den Eckpunkten des Quadrats E,F,G,H gleich weit entfernt sein soll, muss für Q gelten: $Q(1|1|z)$.

Bedingung: $|\overrightarrow{HQ}| = 3 \cdot |\overrightarrow{SQ}|$

$$|\overrightarrow{HQ}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z-6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+(z-6)^2} = \sqrt{z^2 - 12z + 38}$$

$$|\overrightarrow{SQ}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z-8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(z-8)^2} = \sqrt{z^2 - 16z + 64}$$

$$\sqrt{z^2 - 12z + 38} = 3 \cdot \sqrt{z^2 - 16z + 64} \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow z^2 - 12z + 38 = 9z^2 - 144z + 576$$

$$\Leftrightarrow 8z^2 - 132z + 538 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } z_{1,2} = \frac{132 \pm \sqrt{208}}{16} \quad z_1 = 9,15 \quad z_2 = 7,35$$

Da der Punkt Q innerhalb der Pyramide liegen muss, muss $Q(1|1|7,35)$ sein.