

Analysis

Funktionen ableiten (Produkt- und Kettenregel)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juli 2018

Aufgabe 1: Kettenregel

Bestimme die erste Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen:

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x) = (x+2)^4$ | b) $f(x) = 3 \cdot (x^2 - 5)^2$ | c) $f(x) = (15x - 1)^{-4}$ |
| d) $f(x) = (5x^2 + 2)^3$ | e) $f(x) = \frac{-2}{6x+1}$ | f) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ |
| g) $f(x) = \frac{4}{(3x+2)^2}$ | h) $f(x) = \sqrt{4x-1}$ | i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| j) $f(x) = \sqrt[3]{4-3x}$ | k) $f(x) = -5 \cdot \cos(1-x)$ | l) $f(x) = \frac{3}{\cos(x)}$ |
| m) $f(x) = 4 \sin(x^2)$ | n) $f(x) = \frac{3}{(\sin(4x))^5}$ | |

Aufgabe 2: Produktregel

Bestimme die erste Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen:

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$ | b) $f(x) = x \cdot \sin(x)$ |
| c) $f(x) = 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ | d) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-4)$ (mit und ohne Produktregel) |
| e) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$ | f) $f(x) = \pi \cdot \cos(x) \cdot (4-x)$ |

Aufgabe 3: Produkt- und Kettenregel

Bestimme die erste Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen:

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = 2x \cdot \sin(3x-1)$ | b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2+1)^3$ |
| c) $f(x) = (x^2+1) \cdot \sin(x^2)$ | d) $f(x) = \frac{\cos(5x-2)}{x}$ |
| e) $f(x) = (3-2x)^4 \cdot (1+2x)$ | f) $f(x) = -2x^2 \cdot \sqrt{3-x}$ |
| g) $f(x) = 5x \cdot (2 + \cos(x))^3$ | h) $f(x) = \frac{x}{(2x-1)^3}$ |

Lösungen**Aufgabe 1:**

a) $f(x) = (x + 2)^4$

$$f'(x) = 4 \cdot (x + 2)^3$$

b) $f(x) = 3 \cdot (x^2 - 5)^2$

$$f'(x) = 6 \cdot (x^2 - 5) \cdot 2x = 12x \cdot (x^2 - 5)$$

c) $f(x) = (15x - 1)^{-4}$

$$f'(x) = -4 \cdot (15x - 1)^{-5} \cdot 15 = -60 \cdot (15x - 1)^{-5}$$

d) $f(x) = (5x^2 + 2)^3$

$$f'(x) = 3 \cdot (5x^2 + 2)^2 \cdot 10x = 30x \cdot (5x^2 + 2)^2$$

e) $f(x) = \frac{-2}{6x+1} = -2 \cdot (6x+1)^{-1}$

$$f'(x) = 2 \cdot (6x+1)^{-2} \cdot 6 = 12 \cdot (6x+1)^{-2}$$

f) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} = (x-1)^{-3}$

$$f'(x) = -3 \cdot (x-1)^{-4}$$

g) $f(x) = \frac{4}{(3x+2)^2} = 4 \cdot (3x+2)^{-2}$

$$f'(x) = -8 \cdot (3x+2)^{-3} \cdot 3 = -24 \cdot (3x+2)^{-3}$$

h) $f(x) = \sqrt{4x-1} = (4x-1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = 2 \cdot (4x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2-1}} = 5 \cdot (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -2,5 \cdot (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -5x \cdot (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

j) $f(x) = \sqrt[3]{4-3x} = (4-3x)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (4-3x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3) = -1 \cdot (4-3x)^{-\frac{2}{3}}$$

k) $f(x) = -5 \cdot \cos(1-x)$

$$f'(x) = 5 \cdot \sin(1-x) \cdot (-1) = -5 \cdot \sin(1-x)$$

$$\begin{aligned} \text{l) } f(x) &= \frac{3}{\cos(x)} = 3 \cdot (\cos(x))^{-1} \\ f'(x) &= -3 \cdot (\cos(x))^{-2} \cdot (-\sin(x)) = 3 \cdot (\cos(x))^{-2} \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m) } f(x) &= 4 \sin(x^2) \\ f'(x) &= 4 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = 8x \cdot \cos(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n) } f(x) &= \frac{3}{(\sin(4x))^5} = 3 \cdot (\sin(4x))^{-5} \\ f'(x) &= -15 \cdot (\sin(4x))^{-6} \cdot \cos(4x) \cdot 4 = -60 \cdot (\sin(4x))^{-6} \cdot \cos(4x) \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^3 \cdot \cos(x) \\ f'(x) &= 3x^2 \cdot \cos(x) + x^3 \cdot (-\sin(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= x \cdot \sin(x) \\ f'(x) &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\ f'(x) &= 4 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + 4 \cdot \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x) &= \sqrt{x} \cdot (x - 4) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (x - 4) \\ \text{mit Produktregel: } f'(x) &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - 4) + x^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \end{aligned}$$

ohne Produktregel:

$$\text{Ausmultiplizieren der Klammer: } f(x) = x^{1,5} - 4x^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Dann gilt: } f'(x) = 1,5x^{0,5} - 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x) &= \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = x^{-1} \cdot \sin(x) \\ f'(x) &= -1 \cdot x^{-2} \cdot \sin(x) + x^{-1} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f(x) &= \pi \cdot \cos(x) \cdot (4 - x) \\ f'(x) &= \pi \cdot (-\sin(x)) \cdot (4 - x) + \pi \cdot \cos(x) \cdot (-1) \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a) $f(x) = 2x \cdot \sin(3x - 1)$

$$f'(x) = 2 \sin(3x - 1) + 2x \cdot \cos(3x - 1) \cdot 3$$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 + 1)^3 = x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 1)^3$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 1)^3 + x^{\frac{1}{2}} \cdot 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x$$

c) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sin(x^2)$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin(x^2) + (x^2 + 1) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

d) $f(x) = \cos(5x - 2) \cdot x^{-1}$

$$f'(x) = -\sin(5x - 2) \cdot 5 \cdot x^{-1} + \cos(5x - 2) \cdot (-x^{-2})$$

e) $f(x) = (3 - 2x)^4 \cdot (1 + 2x)$

$$f'(x) = 4 \cdot (3 - 2x)^3 \cdot (-2) \cdot (1 + 2x) + (3 - 2x)^4 \cdot 2$$

f) $f(x) = -2x^2 \cdot \sqrt{3 - x} = -2x^2 \cdot (3 - x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -4x \cdot (3 - x)^{\frac{1}{2}} - 2x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -4x \cdot (3 - x)^{\frac{1}{2}} + x^2 \cdot (3 - x)^{-\frac{1}{2}}$$

g) $f(x) = 5x \cdot (2 + \cos(x))^3$

$$f'(x) = 5 \cdot (2 + \cos(x))^3 + 5x \cdot 3 \cdot (2 + \cos(x))^2 \cdot (-\sin(x))$$

h) $f(x) = \frac{x}{(2x - 1)^3} = x \cdot (2x - 1)^{-3}$

$$f'(x) = 1 \cdot (2x - 1)^{-3} + x \cdot (-3) \cdot (2x - 1)^{-4} \cdot 2 = (2x - 1)^{-3} - 6x \cdot (2x - 1)^{-4}$$