

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juli 2022

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1

Betrachtet wird das Abtauchen eines U-Bootes (siehe Abbildung). Die Meeresoberfläche wird durch die x_1x_2 -Ebene dargestellt. Das punktförmige Modell des U-Boots bewegt sich zu Beginn mit konstanter Geschwindigkeit vom Start im Ursprung $O(0|0|0)$ innerhalb einer Minute geradlinig zum Punkt $(60|60|-8)$.

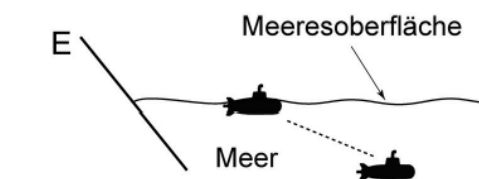


Abbildung: Abtauchen des U-Boots.

Danach behält das U-Boot die Richtung und zunächst auch die Geschwindigkeit bei.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m) in der Realität.

Die Ebene E mit $E: x_1 + x_2 + 10x_3 + 200 = 0$ modelliert für $x_3 \leq 0$ die Grenze zwischen dem Meer und dem unter Wasser liegenden Land.

- 1.1 Geben Sie den Punkt P an, an dem sich das U-Boot nach 2 Minuten befindet. Nennen Sie die zugehörige Tiefe und berechnen Sie den Abstand von P zu O. (2 Punkte)
- 1.2 Berechnen Sie, wie viele Kilometer das U-Boot in einer Stunde zurücklegen würde. (2 Punkte)
- 1.3 Ermitteln Sie die Schnittgerade von E mit der x_1x_2 -Ebene. Beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachkontext. (3 Punkte)
- 1.4 Ab einer Tiefe von 120m beschreibt der Vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$$

die Geschwindigkeit des U-Boots (in Meter pro Minute) beim Abtauchen in den anschließenden 60 Minuten. Danach ist das Abtauchen des U-Boots beendet.

- 1.4.1 Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:
 (1) „Der Betrag der Geschwindigkeit reduziert sich ab 120 m Tiefe um 75%.“
 (2) „Die Geschwindigkeit ändert sich 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens.“ (2 Punkte)
- 1.4.2 Zeigen Sie, dass sich der Abstand des U-Boots zu E mit zunehmender Tiefe vergrößert. (3 Punkte)
- 1.4.3 Ermitteln Sie den mittleren Abstand des U-Boots zu der durch E modellierten Grenze während der letzten 60 Minuten des Abtauchens. (3 Punkte)

Lösungen

- 1.1 *Geben Sie den Punkt P an, an dem sich das U-Boot nach 2 Minuten befindet. Nennen Sie die zugehörige Tiefe und berechnen Sie den Abstand von P zu O.*

$$\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten von P: } P(120|120|-16)$$

Die zugehörige Tiefe ist 16m.

$$\text{Abstand von P zu O: } |\overrightarrow{OP}| = \left| \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ -16 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{120^2 + 120^2 + 16^2} = 170,5$$

Der Abstand von P zu O beträgt etwa 170,5 Meter.

- 1.2 *Berechnen Sie, wie viele Kilometer das U-Boot in einer Stunde zurücklegen würde.*

$$\text{Es gilt } \left| \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{60^2 + 60^2 + (-8)^2} = \sqrt{7264} \approx 85,23 \text{ Meter}$$

Das U-Boot legt 85,23 Meter pro Minute zurück.

$$\text{Das sind } 85,23 \cdot \frac{60}{1000} = 5,114 \text{ Kilometer pro Stunde.}$$

- 1.3 *Ermitteln Sie die Schnittgerade von E mit der x_1x_2 -Ebene. Beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachkontext.*

Gleichung der x_1x_2 -Ebene: $x_3 = 0$

$$\text{Gleichung von E: } E: x_1 + x_2 + 10x_3 + 200 = 0 \quad (*)$$

Setze $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Daraus folgt aus } (*) \quad x_1 = -200 - t$$

$$\text{Schnittgerade } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

Die Gerade h modelliert die Grenze zwischen Meer und Land auf Höhe der Meeresoberfläche.

1.4.1 „Der Betrag der Geschwindigkeit reduziert sich ab 120 m Tiefe um 75%.“

$$\text{Es gilt } \left| \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{15^2 + 15^2 + (-2)^2} = \sqrt{454}$$

$$\text{Es gilt } \frac{\sqrt{454}}{\sqrt{7264}} = 0,25 = 25\%$$

Da die Länge des Vektors nur 25% der Länge des alten Vektors ist, reduziert sich die Geschwindigkeit um 75%. Die Aussage ist wahr.

„Die Geschwindigkeit ändert sich 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens.“

Die Geschwindigkeit ändert sich in einer Tiefe von 120 m.
Gesucht ist der Zeitpunkt, wann das U-Boot diese Tiefe erreicht.

Anhand der Koordinaten des Punktes (60|60|-8) kann man ablesen, dass das U-Boot pro Minute 8 m sinkt.

Das U-Boot erreicht eine Tiefe von 120 m nach $\frac{120}{8} = 15$ Minuten.

Die Aussage ist wahr.

1.4.2 Zeigen Sie, dass sich der Abstand des U-Boots zu E mit zunehmender Tiefe vergrößert.

Die Gerade g mit $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix}$ beschreibt den Weg des U-Boots beim

Abtauchen.

Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene: $60t + 60t - 80t + 200 = 0 \Leftrightarrow t = -5$
Einsetzen von $t = -5$ in g ergibt den Schnittpunkt D(-300|-300|40).

Da die x_3 -Koordinate positiv ist, liegt der Punkt D nicht auf dem Weg des U-Boots.

Daraus folgt die Behauptung.

1.4.3 *Ermitteln Sie den mittleren Abstand des U-Boots zu der durch E modellierten Grenze während der letzten 60 Minuten des Abtauchens.*

Zu Beginn der letzten 60 Minuten des Abtauchens befindet sich das U-Boot in einer Tiefe von 120m im Punkt $A(60 \cdot 15 \mid 60 \cdot 15 \mid -8 \cdot 15) \Rightarrow A(900 \mid 900 \mid -120)$

Am Ende des Abtauchvorgangs befindet sich das U-Boot im Punkt $B(900 + 60 \cdot 15 \mid 900 + 60 \cdot 15 \mid -120 + 60 \cdot (-2)) \Rightarrow B(1800 \mid 1800 \mid -240)$

Berechnung des Abstandes der Punkte A und B von der Ebene E:

$$\text{HNF von E: } \frac{x_1 + x_2 + 10x_3 + 200}{\sqrt{102}} = 0$$

$$d(A,E) = \left| \frac{900 + 900 - 1200 + 200}{\sqrt{102}} \right| = \frac{800}{\sqrt{102}}$$

$$d(B,E) = \left| \frac{1800 + 1800 - 2400 + 200}{\sqrt{102}} \right| = \frac{1400}{\sqrt{102}}$$

Da die Geschwindigkeit des U-Bootes konstant ist, beträgt der mittlere

$$\text{Abstand } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{800}{\sqrt{102}} + \frac{1400}{\sqrt{102}} \right) \approx 108,9 \text{ m}$$