

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022 - Leistungsfach
Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Aufgabe B2

Gegeben sind die Geradenschar $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und

die Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem.

(0,5 VP)

Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Schar g_a gehört.

(1 VP)

Alle Geraden der Schar g_a liegen in einer Ebene E.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

(2 VP)

(Teilergebnis: $E : x_2 + 3x_3 = -6$)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den g_a die x_2 -Achse schneidet.

(1,5 VP)

Es gibt zwei Geraden der Schar g_a , die die Gerade h im Winkel 45° schneiden.

Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a.

(2,5 VP)

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Gerade, die von allen Geraden der Schar g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen Geraden der Schar g_a windschief verläuft.

(2,5 VP)

Lösungen**Aufgabe B2**

a) *Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem.*

Da die x_1 -Koordinate des Richtungsvektors von h gleich Null ist und die x_1 -Koordinate des Stützvektors von h ungleich Null ist, verläuft die Gerade h parallel zur $x_2 - x_3$ -Ebene.

Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Schar g_a gehört.

Es muss einen Wert von a geben, so dass der Richtungsvektor von h ein Vielfaches zum Richtungsvektor von g_a ist.

Dies ist für $a = 0$ der Fall, hier stimmen die beiden Richtungsvektoren überein.

Kontrolle ob der Punkt $P(1|-6|0)$ auf der Gerade g_0 liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1.\text{Zeile: } 1 = 1$$

$$2.\text{Zeile: } -6 = 3t \Leftrightarrow t = -2$$

$$3.\text{Zeile: } 0 = -2 - t \Leftrightarrow t = -2$$

Da das Gleichungssystem die Lösung $t = -2$ besitzt, liegt $P(1|-6|0)$ auf h. Damit sind die Geraden h und g_0 identisch.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

Um zwei Spannvektoren der Ebene E zu ermitteln, wählt man für a zwei verschiedene Werte, z.B. $a = 0$ und $a = 1$.

$$\text{Spannvektoren der Ebene: } \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}^\wedge$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ansatz Koordinatengleichung: E: $x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen des Punkts Q(1|0|-2) in E: $-6 = d$

Koordinatengleichung: E: $x_2 + 3x_3 = -6$

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den g_a die x_2 -Achse schneidet.

$$\text{Gleichung der } x_2\text{-Achse: } k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der Geradengleichungen von k und g_a :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{1. Zeile: } 0 = 1 + a \cdot t$$

$$\text{2. Zeile: } s = 3t$$

$$\text{3. Zeile: } 0 = -2 - t$$

$$\text{Aus der 3. Zeile: } t = -2$$

$$\text{Aus der 2. Zeile folgt dann } s = -6$$

$$\text{Aus der 1. Zeile folgt dann } a = 0,5.$$

Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a .

$$\cos(45^\circ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 10}} \quad | \cdot 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 10}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 10} = 20 \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow 20 \cdot (a^2 + 10) = 400$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 10 = 20$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 10$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{10}$$

- c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Gerade, die von allen Geraden der Schar g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen Geraden der Schar g_a windschief verläuft.

Alle Geraden der Schar befinden sich in der Ebene E: $x_2 + 3x_3 = -6$.

Da die gesuchte Gerade von allen Geraden den Abstand $\sqrt{40}$ hat muss die Gerade in einer Ebene F liegen, die parallel zu E ist und von E den Abstand $\sqrt{40}$ hat.

Ansatz für die Koordinatengleichung von F: $x_2 + 3x_3 = d$

$$\text{HNF von F: } \frac{x_2 + 3x_3 - d}{\sqrt{10}} = 0$$

Für den Punkt $Q(1|0|-2)$ soll gelten: $d(Q, F) = \sqrt{40}$

$$d(Q, F) = \left| \frac{-6 - d}{\sqrt{10}} \right| = \sqrt{40}$$

Daraus folgt $|-6 - d| = 20$

Eine mögliche Lösung ist $d = 14$.

Die gesuchte Gerade liegt in der Ebene F: $x_2 + 3x_3 = 14$

Für den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der gesuchten Geraden gilt:

- 1.) Richtungsvektor ist orthogonal zum Normalenvektor von F:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + 3z = 0 \Leftrightarrow y = -3z$$

- 2.) Richtungsvektor ist kein vielfacher Vektor von $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ für alle Werte von a:

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} x \\ -3z \\ z \end{pmatrix}$$

Diese Ungleichung wird nur für $z = 0$ erfüllt.

Der Wert von x kann beliebig sein, allerdings nicht $x = 0$.

Möglicher Richtungsvektor der gesuchten Geraden: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ein Punkt auf der Ebene F lautet z.B. $T(0|14|0)$, den man als Punkt der gesuchten Geraden wählen kann.

Eine mögliche Gleichung der gesuchten Geraden ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$