Hauptprüfung Abiturprüfung 2022 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Aufgabe B1

Für $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k \le 6$ werden die Pyramiden $ABCD_k$ mit A(0|0|0), B(4|0|0), C(0|4|0) und $D_k(0\,|\,0\,|\,k)$ betrachtet (vgl. Abbildung 1)

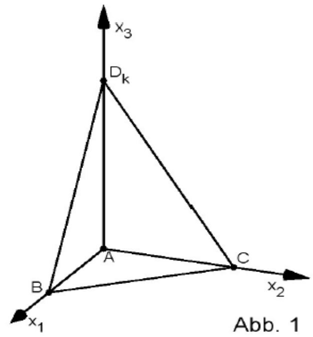


Abb. 1

a) Begründen Sie, dass das Dreieck BCD_k gleichschenklig ist. (1 VP)

Der Mittelpunkt der Strecke BC ist M(2|2|0).

$\left|\overrightarrow{MD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}\right|$ ist die Länge einer Höhe des Dreiecks BCD_k.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k. (1 VP)

Für jeden Wert von k liegt die Seitenfläche BCD_k in der Ebene $L_k: kx_1 + kx_2 + 4x_3 = 4k$.

b) Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den Größe des Winkels, unter dem die x_3 -Achse die Ebene L_k schneidet, 30° beträgt.

(2,5 VP)

c) Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abbildung 2 gezeigte Quader betrachtet. Die Punkte A und Q(1|1|3) sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenfläche des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen.
Für k = 6 enthält die Seitenfläche BCD_k der Pyramide den Eckpunkt Q des Quaders.
Für kleinere Werte von k schneidet die Seitenfläche BCD_k den Quader in einem Vieleck. Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders.
Bestimmen Sie diesen Wert von k. (1,5 VP)
(Teilergebnis: k = 4)
Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k den Quader schneidet.

(2 VP)

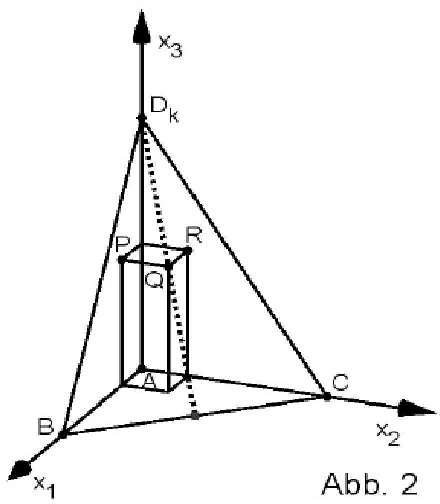


Abb. 2

d) Nun wird die Pyramide $ABCD_6$, d.h. diejenige für k = 6, betrachtet. Dieser Pyramide werden Quader einbeschrieben (vgl. Abbildung 3). Die Grundflächen der Quader liegen in der x_1x_2-Ebene, haben den Eckpunkt A gemeinsam und sind quadratisch. Die Höhe h der Quader durchläuft alle reellen Werte mit 0 < h < 6. Für jeden Wert von h liegt der Eckpunkt Q_h in der Seitenfläche BCD_6 der Pyramide. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts Q_h.

(2 VP)

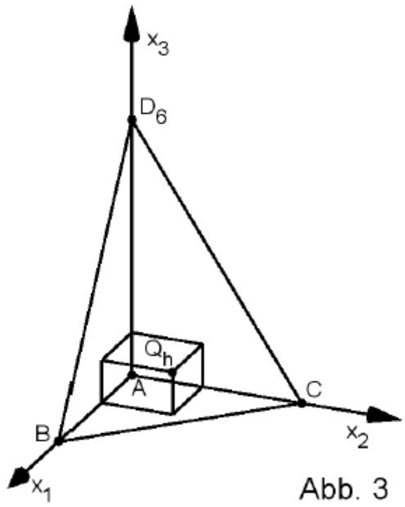


Abb. 3

Lösungen

Aufgabe B1

a) *Begründen Sie, dass das Dreieck* BCD_k *gleichschenklig ist.*

Berechnung der Seitenlängen des Dreiecks:

$$\left|\overrightarrow{BD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+k^2} \qquad \left|\overrightarrow{CD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ k \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+k^2}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

Da $\left|\overrightarrow{BD_k}\right| = \left|\overrightarrow{CD_k}\right|$ gilt, ist das Dreieck gleichschenklig.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k*.*

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MD_k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot\sqrt{4+4+k^2} = \frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot\sqrt{8+k^2}$$

b) *Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den Größe des Winkels, unter dem die* x_3*-Achse die Ebene* L_k *schneidet, 30° beträgt.*

Schnittwinkelformel zwischen Gerade und Ebene: $\sin(\alpha) = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor der x_3-Achse: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sin(30^\circ) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k \\ k \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{k^2+k^2+16}} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{2k^2+16}} \quad \left|\cdot 2\cdot\sqrt{2k^2+16}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2k^2+16} = 8 \quad | \text{ quadrieren}$$

$$\Rightarrow 2k^2+16 = 64$$

$$\Rightarrow k = \pm\sqrt{24}$$

Wegen k > 0 gilt $k = \sqrt{24}$.

c) *Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche* BCD_k *durch die Eckpunkte P und R des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von k.*

Anhand der Koordinaten von Q(1|1|3) können die Koordinaten von P bestimmt werden, der in der $x_1 - x_3$-Ebene liegt: P(1|0|3)

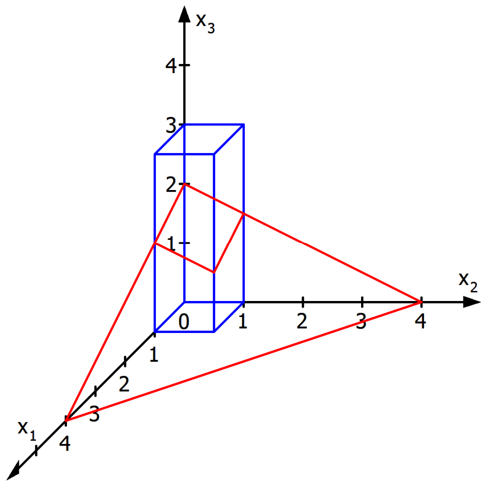
Einsetzen von P in die Ebenengleichung L_k:

$k \cdot 1 + k \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 4k$

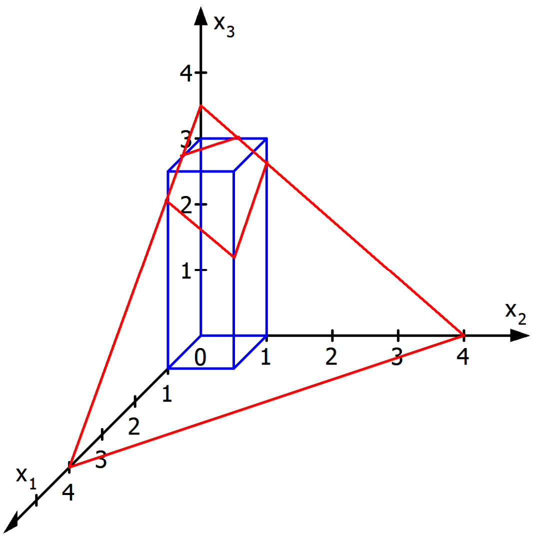
$\Leftrightarrow 3k = 12 \Leftrightarrow k = 4$

Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k *den Quader schneidet.*

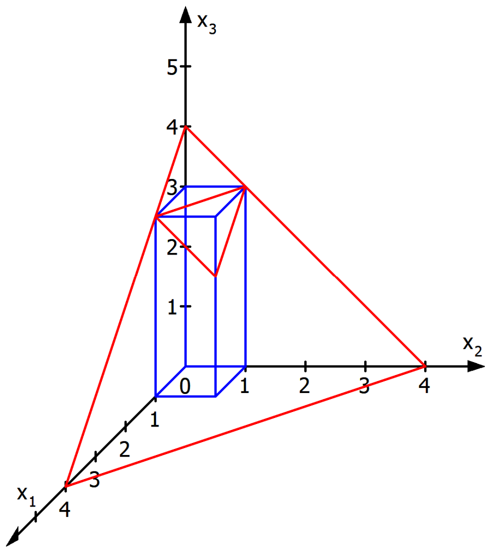
Ebene für k = 2: Schnittfläche ist ein Viereck
Dies gilt für alle Werte von k mit $0 < k \leq 3$.

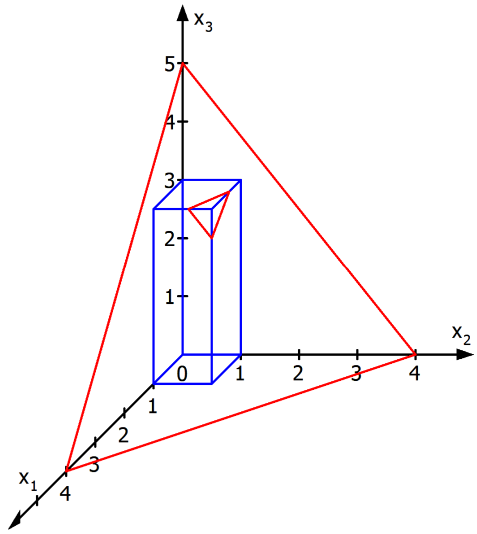


Ebene für k = 3,5: Schnittfläche ist ein Fünfeck.
Dies gilt für alle Werte von k mit 3 < k < 4.



Ebene für k = 4 und k = 5: Schnittfläche ist ein Dreieck
Dies gilt für alle Werte von k mit $4 \le k < 6$.





d) *Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts* Q_h.

Da der Quader eine quadratische Grundfläche hat, sind die x_1 - und x_2 -Koordinaten des Punktes Q_h identisch.
Allgemeine Koordinaten: $Q_h(u\,|\,u\,|\,h)$

Einsetzen in die Gleichung der Ebene $L_6: 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 24$

$$6u + 6u + 4h = 24$$
$$\Leftrightarrow 12u = 24 - 4h$$
$$\Leftrightarrow u = 2 - \frac{1}{3}h$$

Die gesuchten Koordinaten lauten $Q_h(2 - \frac{1}{3}h\,|\,2 - \frac{1}{3}h\,|\,h)$